

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# Спеціальні розділи математики

## Статистичний аналіз даних у середовищі STATISTICA

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю  
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,  
спеціалізацією «Комп'ютерно-інтегровані технології сталих хімічних виробництв»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2019

Спеціальні розділи математики. Статистичний аналіз даних у середовищі STATISTICA [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», спеціалізації «Комп'ютерно-інтегровані технології сталих хімічних виробництв» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Джигирей, Д. М. Складанний. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,41 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 74 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 20.06.2019 р.)  
за поданням Вченої ради Хіміко-технологічного факультету (протокол № 5 від 29.05.2019р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# Спеціальні розділи математики

## Статистичний аналіз даних у середовищі STATISTICA

Укладачі: *Джигирей Ірина Миколаївна, канд. техн. наук, доц.  
Складаний Денис Миколайович, канд. техн. наук, доц.*

Відповідальний редактор *Шахновський А.М., канд. техн. наук, доц.*

Рецензент: *Пишинограєв І.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

У навчальному посібнику наведено завдання, виконувані протягом практичних робіт та самостійної роботи, з основних принципів багатомірного аналізу даних за допомогою пакету прикладних програм STATISTICA, а саме графічних методів аналізу даних, кластерного аналізу, факторного аналізу та дискримінантного аналізу. Видання забезпечує вивчення студентами теоретичного матеріалу, підготовку до виконання комп'ютерних практичних робіт та буде корисним для самостійної роботи.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

## ЗМІСТ

<b>Передмова .....</b>	<b>4</b>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.1</b>	
<i>Графічні методи аналізу даних у середовищі STATISTICA .....</i>	<i>6</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.2</b>	
<i>Розрахунок мір подібності уживаних у кластерному аналізі .....</i>	<i>9</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.3</b>	
<i>Ієрархічні методи кластеризації. Кластерний аналіз у</i> <i>ППП STATISTICA .....</i>	<i>12</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.4</b>	
<i>Факторний аналіз у ППП STATISTICA .....</i>	<i>16</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.5</b>	
<i>Визначення достатності кількості виділених факторів .....</i>	<i>21</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.6</b>	
<i>Дискримінантний аналіз у ППП STATISTICA .....</i>	<i>26</i>
<b>Комп'ютерна практична робота № 2.7</b>	
<i>Класифікація спостережень на основі дискримінантного</i> <i>аналізу даних .....</i>	<i>30</i>
<b>Рекомендована література .....</b>	<b>33</b>
<b>Додаток А.</b>	
<i>Заходи безпеки під час проведення практичних занять .....</i>	<i>34</i>
<b>Додаток Б.</b>	
<i>Вимоги до оформлення звіту за результатами виконання завдань у</i> <i>рамках практичного заняття .....</i>	<i>37</i>
<b>Додаток В.</b>	
<i>Зразок титульного листа звіту .....</i>	<i>38</i>
<b>Додаток Г.</b>	
<i>Завдання для кластеризування об'єктів ієрархічними</i> <i>агломеративними методами .....</i>	<i>39</i>
<b>Додаток Д.</b>	
<i>Завдання для факторного аналізу .....</i>	<i>42</i>
<b>Додаток Е.</b>	
<i>Завдання для дискримінантного аналізу .....</i>	<i>64</i>

## Передмова

Прикладна математична статистика – наука про методи обробки статистичних даних, отриманих у результаті проведених експериментів або спостережень. З результатами спостережень, вимірювань, випробувань, дослідів, з їх аналізом мають справу фахівці в багатьох областях теоретичної і практичної діяльності. Методи прикладної статистики активно застосовуються як у технічних дослідженнях, так і в інших галузях людської діяльності.

Цей навчальний посібник є частиною інформаційно-методичного забезпечення навчальної дисципліни «Спеціальні розділи математики» і розроблений відповідно до програми підготовки бакалаврів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Зазначена дисципліна є основою формування професійних знань і умінь студентів щодо теоретичних основ математичної статистики, сучасних задач прикладної математичної статистики та методів їх розв'язування, основних принципів багатомірного аналізу даних. Кредитний модуль цієї дисципліни «Прикладна математична статистика» відноситься до циклу природничо-наукової підготовки і є базовим у підготовці бакалаврів вказаної спеціальності.

Робота студента над учбовим матеріалом з дисципліни містить такі види роботи: вивчення матеріалу за навчальними посібниками і підручниками, відвідування лекцій, виконання завдань у рамках практичних занять, виконання домашньої контрольної роботи, індивідуальних консультацій; здавання заліку. 40 % часу відводиться на самостійну роботу.

Представлені матеріали мають на меті закріплення знань та набуття вміння застосовувати навички, отримані в процесі вивчення кредитного модуля «Прикладна математична статистика» дисципліни «Спеціальні розділи математики». Компетентності, отримані студентами в процесі вивчення цього кредитного модуля застосовуються ними для опанування другого модуля цієї дисципліни, а також дисциплін «Комп'ютерне моделювання систем і процесів», «Технології розроблення програмного забезпечення», навчальної дисципліни з моделювання процесів тепло-масообміну, дисциплін рівня підготовки «магістр», а також виконання дипломного проекту бакалавра.

Це електронне видання призначено для надання допомоги студентам денної форми навчання спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» у вивченні кредитного модуля Прикладна математична статистика» дисципліни «Спеціальні розділи математики». З цією метою у цьому виданні подано перелік тем, які студент повинен

вивчити та, за матеріалами яких проводяться комп'ютерні практичні заняття, надано методичні вказівки до виконання завдань протягом занять, наведено основні теоретичні положення. Навчальний посібник містять завдання для практичних занять, вимоги до оформлення протоколів і контрольні питання для самопідготовки студентів. В навчальному посібнику також наведено заходи безпеки, яких треба дотримуватись під час проведення комп'ютерних практичних занять (додаток А).

## Комп'ютерна практична робота № 2.1

### Графічні методи аналізу даних у середовищі STATISTICA

**Мета роботи.** Ознайомитися з інструментарієм візуалізування даних у середовищі STATISTICA, набути вмінь створення і редагування графіків у середовищі STATISTICA.

**Завдання.** За наданими даними подубувати вказані типи двомірних та тримірних діаграм у середовищі STATISTICA

#### Короткі теоретичні відомості<sup>1</sup>.

Графічні можливості STATISTICA дають змогу відобразити графічно числові значення та їх комбінації, а також їх текстові описи. Крім загальних типів графіків існують спеціалізовані графіки, які інтегровано у відповідні статистичні процедури і які доступні за допомогою діалогових вікон та контекстних меню. Графіки автоматично підтримують зв'язок з даними, проте графічні документи містять опції, налаштування, стилі, інформацію про вбудовані, зв'язані та впроваджені об'єкти, а тому їх можна редагувати або експортувати без наборів даних. Якщо таблицю вихідних даних зв'язано із зовнішнім джерелом, можна задати автопоновлення змінюваних даних. Вбудовані статистичні можливості, які доступні для графіків (згладжування, обертання, масштабування тощо), можна використовувати і застосовувати незалежно від джерела даних і методу їх створення.

STATISTICA містить набір 2D і 3D графіків (стовпчасті, кругові діаграми, лінійні, зонні, накладені графіки, діаграми розмахів, відхилень, блокові графіки тощо), а також аналітичні та дослідницькі графіки:

- гістограми (згладжувальна, кумулятивна, складена, з подвійною віссю ординат, підігнана, висячих стовпців, 1М та 2М категоризовані складені гістограми, матрична, 3М гістограма двох змінних, поверхнева згладжувальна, гістограма з діаграмами розсіювання і послідовністю, з ковзним середнім тощо);
- графіки середніх зі стовпцями похибок;
- діаграми розмаху і міри дисперсій, графіки викидів і крайніх точок; діаграми розмаху з викидами і діаграмами розсіювання, 2М, 3М і категоризовані графіки діапазонів або мінливості в кількох наборах даних тощо;

---

<sup>1</sup> на основі веб-ресурсу компанії StatSoft – розробника ПЗ STATISTICA

- діаграми розсіювання (складені, з подвійною віссю ординат, діаграми частот, маркіровані, з відміченими точками, зважені, матричні діаграми розсіювання, XYZ діаграми розсіювання, тернарні діаграми розсіювання, діаграми розсіювання у полярних координатах, спеціалізовані діаграми розсіювання тощо);
- лінійні графіки (складені, агреговані, маркіровані, з подвійною віссю ординат, тривимірні, стрічкові);
- набір 2М і 3М-функцій підгонки і побудування графіків, графіки підгонки розподілів;
- категоризовані та прості графіки пропущених даних/діапазонів;
- піктографіки, матричні графіки, 2М і 3М графіки у трикутних координатах (тернарні, зокрема проекції на площину, поверхні, тощо);
- категоризовані складені діаграми двохідних об'єднань;
- 3М графіки, у тому числі XYZ діаграми розсіювання, просторові графіки, спектральні графіки, діаграми відхилень тощо;
- користувацькі графіки, графіки функцій, 3М кругові діаграми тощо;
- спеціалізовані складені 3М (4М) графіки та інші.

Найпростіший спосіб створення користувацького графіку – це створення потрібного графіку звичайним способом, а потім додавання його як користувацького.

### **Послідовність виконання роботи**

1. Створити новий документ – великоформатну таблицю (англ. spreadsheet). Задати: кількість змінних (англ. vars) – 2, кількість випадків (регістрів, англ. cases) – 100, розміщення – у новій книзі. Перейменувати створену таблицю (*Прізвище – табл. 9*) та зберегти книгу.
2. Додати до створеної таблиці довільну кількість випадків.
3. Перейменувати першу та другу змінні на  $x$  та  $y$ , відповідно. Змінити формат та відображення цих змінних на число (англ. number) з трьома та чотирма знаками після коми. Сформувати значення першої змінної за допомогою датчика випадкових чисел  $=\text{RndNormal}(n)$ , де  $n$  – № п.п. студента у списку академічної групи. Сформувати значення другої змінної, використовуючи значення першої, за формулою  $=\text{Sqrt}(\text{Abs}(\xi))$ , де  $\xi$  – задане ім'я першої змінної, або її номер (v1).
4. Побудувати стандартну гістограму (англ. standard histogram) для змінної  $x$ . Побудувати 2М графік – графік розсіювання (англ. scatterplot) для функції  $y=f(x)$ . Зробити принаймні дві копії графіку та змінити щонайменше п'ять параметрів кожного графіка, наприклад, формат і

текст заголовку (англ. graph titles i text), підзаголовкового напису або осей (вкладка «Title» групи «Axis»), маркери (вікно «Markers» вкладки «Plot: General»), лінії (вікно «Line» вкладки «Plot: General»), заливання (вікно «Area» вкладки «Plot: General»), формат відображення значень змінних на осях (секція «Value format» вкладки «Axis: Scale values»), фонові кольори (вкладка «Graph window»); відобразити або приховати лінію тренду (вкладка «Plot: Fitting») тощо. Перейменувати створені графіки та зберегти книгу.

5. Додати до створеної таблиці (*Прізвище – табл. 9*) нову змінну  $z$ ; значення змінної сформулювати за формулою  $=1/(x+0,1*n)^2+1/(y-0,1*n)^2$  або іншою після погодження з викладачем. Побудувати 3М графік поверхні (англ. 3d surface plot) для функції  $z=\varphi(x, y)$ ; як метод припасування використати зважений МНК (англ. distance weighted ls) або інтерполювання сплайнами (англ. spline). Зробити принаймні дві копії 3М графіка та змінити щонайменше п'ять його параметрів (див. п. 4 послідовності виконання роботи), а також відобразити або приховати 2М проекцію (англ. surface), змінити кут відображення (англ. point of view) тощо). Перейменувати створені графіки та зберегти книгу.
6. Додати до книги новий графік: 3М графік розсіювання, 3М контурний графік, лінійний графік; або додати четверту змінну та побудувати тернарну діаграму, або іншу. Зробити кілька копій графіка та змінити його параметри. Перейменувати створені графіки та зберегти книгу.
7. Оформити звіт з виконання завдань виконаних протягом практичного заняття.

### Оформлення звіту

До звіту потрібно додати детальний хід виконання побудови графіків, створених протягом практичного заняття.

### Контрольні запитання

1. Назвіть принаймні десять опцій графіків STATISTICA, які можна редагувати за допомогою вікна «Усі опції» або допоміжних вікон.
2. Чим суттєво відрізняється з'єднання точок даних 2D графіку ламаною від додавання лінії підгонки?
3. Чи вплине на вміст графіку змінювання даних у вихідній таблиці?
4. Що дає змогу виконати операція масштабування вісі графіку? Наведіть приклад.
5. Опишіть функції принаймні десяти інструментів представлених на панелі «Інструменти графіків».



## Комп'ютерна практична робота № 2.2

### Розрахунок мір подібності у кластерному аналізі

**Мета роботи.** Розглянути види мір подібності. Опанувати методи розрахунку деяких мір відстані, використовуваних, зокрема, у кластерному аналізі. Набути вміння визначення таких мір відстані: евклідової, квадратичної евклідової, манхеттенівської та степеневі.

**Завдання.** За наданими даними спостережень виконати розрахунок евклідової, квадратичної евклідової, манхеттенівської та степеневі мір відстаней. Перевірити отримані результати за допомогою ППП STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості.

Вирізняють такі міри подібності: А – коефіцієнти кореляції, Б – міри відстані (віддаленості, неподібності), В – коефіцієнти асоціативності, Г – ймовірнісні коефіцієнти подібності.

Введемо позначення:  $d(C_i, C_j)$  – відстань між  $i$ -м та  $j$ -м об'єктами;  $C_{ik}$  – значення  $k$ -ї змінної для  $i$ -го об'єкту;  $C_{jk}$  – значення  $k$ -ї змінної для  $j$ -го об'єкту;  $k = \overline{1, V}$ , де  $V$  – кількість змінних, за допомогою яких характеризують об'єкти.

1(Б) **Евклідова відстань** (англ. euclidean distance) – одна з на використовуваних типів відстаней

$$d_{Euc}(C_i, C_j) = \sqrt{\sum_k (C_{ik} - C_{jk})^2}. \quad (2.1)$$

2(Б) **Квадратична евклідова відстань** (англ. squared euclidean distance)

$$d_{Euc}^2(C_i, C_j) = \sum_k (C_{ik} - C_{jk})^2. \quad (2.2)$$

3(Б) **Манхеттенівська відстань** (англ. Manhattan distance) або відстань міських кварталів (англ. city-block distance)

$$d_{c-b}(C_i, C_j) = \sum_k |C_{ik} - C_{jk}|. \quad (2.3)$$

Міра впливу окремих викидів зменшується, оскільки вони не підносяться у квадрат.

4(Б) **Відстань Махаланобіса** (англ. Mahalanobis distance) пов'язана з кореляціями змінних

$$d_{Mah}(\vec{C}_i, \vec{C}_j) = (\vec{C}_i - \vec{C}_j)^T \Sigma^{-1} (\vec{C}_i - \vec{C}_j), \quad (2.4)$$

де  $\Sigma$  – внутрішньогрупова дисперсійно-коваріаційна матриця.

Якщо кореляція між параметрами відсутня, відстань Махаланобіса еквівалентна квадратичній евклідовій відстані.

5(Б) **Метрика домінування** (супремум-норма) або відстань Чебишева (англ. Chebyshev distance),

$$d_{\text{sup}}(C_i, C_j) = \max_k |C_{ik} - C_{jk}|. \quad (2.5)$$

6(Б) Узагальнена **метрика Мінковського**

$$d_{\text{Min}}(C_i, C_j) = (\sum_k |C_{ik} - C_{jk}|^p)^{1/p}. \quad (2.6)$$

Якщо  $p=2$ , то отримуємо евклідову відстань, якщо  $p=1$  – Манхеттенівську відстань, якщо  $p$  прямує до нескінченності – відстань Чебишева.

7(Б) Степенева відстань (англ. power distance)

$$d_{\text{pow}}(C_i, C_j) = (\sum_k |C_{ik} - C_{jk}|^p)^{1/r}. \quad (2.7)$$

Якщо  $r=2$ , то отримуємо евклідову відстань.

8 (А) Лінійний коефіцієнт кореляції Пірсона

$$r_{ij} = \frac{\sum_k (C_{ik} - \bar{C}_i)(C_{jk} - \bar{C}_j)}{\sqrt{\sum_k (C_{ik} - \bar{C}_i)^2 \sum_k (C_{jk} - \bar{C}_j)^2}}. \quad (2.8)$$

### Послідовність виконання

1. Виконати розрахунок евклідової, квадратичної евклідової, манхеттенівської та степеневої ( $p = 2, r = 3$ ) мір відстані для п'яти об'єктів (табл. 1).

Таблиця 2.1 – Значення змінних<sup>2</sup>

Об'єкт/Змінна	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$x$	$2 \times n$	$3 \times n$	$5 \times n$	$5 \times n$	$6 \times n$
$y$	$3 \times n$	$3 \times n$	$1 \times n$	$2 \times n$	$2 \times n$
$z$	$1 \times n$	$2 \times n$	$3 \times n$	$4 \times n$	$3 \times n$

2. Перевірити отримані результати за допомогою ППП STATISTICA. Створити новий документ – великоформатну таблицю. Задати: кількість змінних – 3, кількість регістрів – 5, розміщення – у новій книзі. Перейменувати створену таблицю (*Прізвище – табл. 10*) та зберегти книгу. Додати до створеної таблиці задані об'єкти. Перейменувати змінні на  $x$ ,  $y$  та  $z$ , відповідно. Виконати кластеризування (команда «Cluster analysis» підменю «Multivariate exploratory techniques» меню

<sup>2</sup>  $n$  – № п.п. студента у списку академічної групи

«Statistics») за алгоритмом середнього зв'язку (у списку «Amalgamation / Linkage rule» вікна «Cluster analysis» обрати «Unweighted pair-group average») використовуючи послідовно усі вказані види мір відстаней. Порівняти результати отримані у п. 1 послідовності виконання зі значеннями у матрицях відстаней, які можна відобразити за допомогою команди «Distance matrix» вкладки «Advanced» вікна «Joining results».

3. Виконати аналіз отриманих результатів.
4. Оформити звіт з виконання завдань практичного заняття.

### **Оформлення звіту**

До звіту потрібно додати детальний хід виконання розрахунків, виконаних протягом практичного заняття.

### **Контрольні запитання**

1. Математичні характеристики кластеру.
2. Охарактеризувати види мір подібності.
3. Як визначити евклідову та квадратичну евклідову відстані між двома об'єктами?
4. Як визначити відстань міських кварталів між двома об'єктами?
5. Показати на прикладах зв'язок метрики Мінковського з іншими видами мір відстані.

## Комп'ютерна практична робота № 2.3

### Ієрархічні методи кластеризації.

### Кластерний аналіз у ППП STATISTICA

**Мета роботи.** Набути умінь використання базових алгоритмів кластеризування, набути вмінь проведення кластерного аналізу сукупності об'єктів за допомогою ППП STATISTICA.

**Завдання.** Згідно індивідуального завдання (Додаток Г) виконати кластеризування об'єктів за двома ознаками у середовищі STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості.

Існує велика кількість методів кластеризування. Нижче наведено деякі родини кластерних методів.

- 1) Ієрархічні методи
  - агломеративні;
  - дивизимні.
- 2) Алгоритми розбивання, зокрема ітераційні методи
  - метод k-середніх;
  - метод «сходження на пагорб».
- 3) Факторні методи.
- 4) Нейромережні методи.
- 5) Методи ущільнення об'єктів.
- 6) Грід-методи.
- 7) Методи моделювання

та інші. Також вирізняють двохідне об'єднання, коли кластеризування здійснюють одночасно і за об'єктами, і за змінними, які ці об'єкти характеризують.

#### Деякі ієрархічні агломеративні методи<sup>3</sup>

① *Алгоритм «близького сусіди»* (одиначний зв'язок, англ. single linkage)

За правилом об'єднання для методу одиначного зв'язку новий кандидат приєднується до кластеру, якщо він має найвищу ступінь подібності до якогось з членів кластеру

$$\min\{d(C_i, C_j): C_i \in A, C_j \in B\}. \quad (3.1)$$

Відстань від деякого об'єкту до групи об'єктів визначають як відстань до найближчого об'єкту з цієї групи. Тому отримувані кластери мають тенденцію бути представленими довгими «ланцюгами».

---

<sup>3</sup> так звані правила об'єднання

② Алгоритм «далекого сусіди» (повний зв'язок, англ. complete linkage)

Відстань між кластерами визначається найбільшою відстанню між будь-якими двома об'єктами у різних кластерах

$$\max\{d(C_i, C_j): C_i \in A, C_j \in B\}. \quad (3.2)$$

Відстань від деякого об'єкту до групи об'єктів визначають як відстань до найвіддаленішого об'єкту з цієї групи. Цей алгоритм добре працює для об'єктів, що утворюють «гаї», і погано – для тих, що утворюють «ланцюги».

③ Алгоритм середнього зв'язку (див. вище,  $\frac{1}{|A| \times |B|} \sum_{C_i \in A} \sum_{C_j \in B} d(C_i, C_j)$ ):

- незважений (англ. unweighted pair-group average, абр. UPGMA);
- зважений (англ. weighted pair-group average, абр. WPGMA), де як ваговий коефіцієнт використовують розмір кластерів тобто кількість об'єктів у них.

На першому кроці кожний об'єкт розглядають як окремий кластер. На кожному наступному кроці об'єднують два найближчі кластери. Відстань між кластерами розраховують як середнє арифметичне відстаней між парами об'єктів, один з яких входить у перший кластер, а інший – у другий. Нарешті усі об'єкти об'єднують разом. У результаті отримуємо дерево послідовних об'єднань – дендрограму. Дендрограма – деревовидна діаграма, яка містить  $n$  рівнів, кожний з яких відповідає одному з кроків процесу послідовного укрупнення кластерів.

④ Центроїдний метод, за яким відстань між двома кластерами визначають як відстань між їх центрами ваги:

- незважений (англ. unweighted pair-group centroid, абр. UPGMC);
- зважений (англ. weighted pair-group centroid, абр. WPGMC).

⑤ Метод Варда (або Уорда, англ. Ward's method).

Метод мінімізує суму квадратів відстаней для будь-яких двох кластерів, які може бути сформовано на кожному кроці, та намагається створювати кластери малих розмірів. Метод побудовано таким чином, щоб мінімізувати дисперсію всередині кластерів. Тобто сума квадратів відхилень  $C_j^2 - \frac{1}{n}(\sum C_j)^2$  на першому кроці дорівнюватиме 0. За методом Варда об'єднуються ті групи або об'єкти, для яких сума квадратів отримує мінімальний приріст.

У процедурах кластеризування, що використовують послідовне об'єднання елементів, застосовується така узагальнена формула для перерахування відстані між кластером «а» та кластером «бв», який є об'єднанням кластерів «б» та «в».

$$d(C_a, C_{bv}) = \alpha * d_{ab} + \beta * d_{av} + \gamma * d_{bv} + \delta * |d_{ab} - d_{av}|. \quad (3.3)$$

У випадку single linkage маємо  $\alpha = \beta = -\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 0$ , у випадку complete linkage –  $\alpha = \beta = \delta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 0$ .

### Ієрархічні дивизимні методи

На початковому етапі уся вибірка розглядається як єдиний кластер, після чого починається процес його розділення доки кожний об'єкт не стане окремим кластером.

Розрізняють монотетичне розділення на основі однієї ознаки та політетичне розділення на основі усіх ознак об'єктів.

Кластерний аналіз у пакеті STATISTICA проводять за допомогою модуля «Cluster Analysis», який можна викликати за допомогою підменю «Multivariate Exploratory Techniques» меню «Statistics». Якщо ознаки об'єктів представлено у різних одиницях вимірювання варто виконати попереднє нормування даних за допомогою підменю «Standardize Block» меню «Edit».

У діалоговому вікні «Clustering Method» представлено такі методи

- «Joining (tree clustering)» – агломеративні методи;
- «K-means clustering» – метод  $k$ -середніх;
- «Two-way joining» – двовхідне об'єднання.

У разі вибору агломеративних методів з'являється діалогове вікно «Cluster Analysis: Joining (tree clustering)», у якому можна вибрати алгоритм об'єднання кластерів («Single Linkage», «Complete Linkage», «Unweighted pair-group average», «Weighted pair-group average», «Unweighted pair-group centroid», «Weighted pair-group centroid» або «Ward's method») та міру відстаней («Squared Euclidean distances», «Euclidean distances», «City-block (Manhattan) distances», «Chebychev distance metric», «Power<sup>4</sup>», «Percent disagreement<sup>5</sup>», «1-Person  $r$ »). Опцію «Distance matrix» у рядку «Input file» передбачено для випадку, якщо початкові дані представлено у вигляді мір подібності. «Блок MD deletion» призначено для вибору способу оброблення неповних даних

- «Casewise» – неповні дані порядково видаляють;
- «Mean substitution» – пропущені дані замінюють середніми значеннями.

У вікні «Joining Results» можна переглянути хід об'єднання у вигляді горизонтальної та вертикальної дендрограми, схеми об'єднання і графіка схеми об'єднання, отримати вихідну матрицю відстаней і описові характеристики, зокрема середні значеннями та стандартні відхиленнями для кожного об'єкта.

---

<sup>4</sup> з можливістю вибору значень  $p$  та  $r$  (див. формулу 7)

<sup>5</sup> для категоріальних даних

### **Послідовність виконання**

1. Виконати кластеризування об'єктів методом «близького сусіди» для вихідних і нормованих даних.
2. Виконати кластеризування об'єктів методом «далекого сусіди» для вихідних і нормованих даних. Тип відстані використати такий самий як і для задачі 1.
3. Виконати кластеризування об'єктів методом «близького сусіди» або «далекого сусіди» (для вихідних або нормованих даних) з використанням іншого типу відстані ніж у задачах з пп. 1 та 2 послідовності виконання.
4. Оформити звіт з виконання завдань практичного заняття.

### **Оформлення звіту**

До звіту додати хід розв'язування задач за пп.1-3, зокрема, матриці відстаней і відредаговані дендрограми (вказати використаний тип відстані).

### **Контрольні запитання**

1. Назвіть родини методів кластерного аналізу.
2. Який об'єкт називають спірним?
3. Коротко опишіть хід кластеризування за алгоритмом «близького сусіди».
4. Коротко опишіть хід кластеризування за алгоритмом середнього зв'язку.
5. Коротко опишіть хід кластеризування за алгоритмом «далекого сусіди».
6. Вкажіть правила об'єднання для алгоритмів одичного і повного зв'язку.
7. Чим відрізняються агломеративні та дивизимні ієрархічні методи?

## Комп'ютерна практична робота № 2.4

### Факторний аналіз у ППП STATISTICA

**Метою роботи** є набуття вмінь та досвіду проведення факторного аналізу сукупності об'єктів за допомогою методу головних компонент, освоєння класичної моделі факторного аналізу, дослідження процедури зниження розмірності за допомогою методу головних компонент.

**Завдання.** За наданими результатами спостережень згідно індивідуального завдання (Додаток Д) виконати факторний аналіз. Виконати розрахунки у середовищі STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості.

*Факторний аналіз* – це методика комплексного і системного вивчення та оцінювання впливу факторів на величину результуючих показників. За взаємопов'язаними (корельованими) змінними стоїть вплив деякої прихованої, латентної, змінної (фактору), за допомогою якої можна пояснити спостережувану подібність отримуваних оцінок. Отже, фактор можна виділити як змінну загальнішого, вищого, порядку. Факторний аналіз може виступати як

- (1) дослідницький і як
- (2) перевірковий метод аналізу даних.

У першому випадку задачами факторного аналізу є структурування зв'язків між змінними, з'ясування причин виявлених зв'язків. У другому випадку факторний аналіз є засобом перевірення відповідності сформульованих гіпотез і визначених зв'язків отриманим емпіричним даним.

**Цілі** факторного аналізу:

- перетворення взаємодії багатьох змінних у взаємодію малої кількості факторів (зменшення розмірності);
- групування, структурування і візуалізування отриманих даних;
- виявлення факторів (причинно-наслідкових зв'язків), що лежать в основі кореляцій.

#### *Класична модель факторного аналізу*

Припущення:

- (1) Спостережувані змінні, за допомогою яких оцінюється об'єкт, взаємозалежать лінійно.
- (2) Спостережувані змінні може бути представлено лінійною комбінацією деяких латентних змінних або факторів.



**Спільні фактори** (англ. common factors) пов'язані з багатьма змінними. **Характерні фактори** (англ. unique factors) специфічним чином пов'язані з однією змінною.

$$x_{ik} = \frac{a_{1k}}{i} \times f_{i1} + \dots + \frac{a_{tk}}{i} \times f_{it} + e_{ik}, \quad (4.1)$$

$$i = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}, t = \overline{1, m}, m < p,$$

де  $n$  – кількість об'єктів,  $p$  – кількість ознак,  $m$  – кількість факторів,  $x_{ik}$  – значення  $k$ -ї ознаки для  $i$ -го об'єкту як лінійної комбінації значень спільних факторів  $f_t$ ,  $a_{tk}$  – регресійні коефіцієнти, які відображають вклад кожного з  $t$  факторів у  $k$ -у змінну,  $e_{ik}$  – фактори характерні для  $k$ -ї змінної.

У такий спосіб кожен змінну може бути представлено як сума вкладів кожного зі спільних факторів. З другого боку кожний з  $t$  факторів може бути виражено лінійною комбінацією спостережуваних змінних. **Факторні навантаження** (англ. factor loadings) – значення коефіцієнтів кореляції кожної з вихідних ознак з кожним з визначених факторів.

$$f^t = w_{t1} \times x_1 + \dots + w_{tk} \times x_k + \dots + w_{tp} \times x_p, \quad (4.2)$$

де  $w_{tk}$  – навантаження  $t$ -го фактора на  $k$ -у змінну.

Модель факторного аналізу в матричній формі

$$X = A \times F + E, \quad (4.3)$$

де  $A$  – матриця  $p \times m$  навантажень спільних факторів на досліджувані ознаки. Якщо фактор  $f$  добре описує поведінку спостережуваної змінної  $x_{ik}$ , то значення навантаження  $a_{tk}$  буде достатньо великим. Вектор  $E$  визначає ту частину кожної зі спостережуваних величин, яку не може бути пояснено спільними факторами.  $E$  (невязка) – вектор характерної частини змінних (характерні фактори) і похибка вимірювань (факторні похибки). Припускається, що компоненти  $F$  і  $E$  некорельовані. Змінна може одночасно залежати від кількох спільних факторів, але тільки від одного характерного фактору і одного фактору похибки.

На практиці факторний аналіз використовують для аналізу спільних факторів і відповідних факторних навантажень. Практична модель факторного аналізу:

$$X = A \times F. \quad (4.4)$$

Геометрично сукупність факторів  $F$  задає базис простору факторів. Ідеальною матрицею навантажень вважається така, яка дає змогу максимально чітко розділити змінні за факторами, які проявляються в них найсильніше. Це досягається перетворенням базису, який не змінює факторний простір.

### Метод головних компонент (МГК)<sup>6</sup>

Спільні фактори – ортогональні. Характерні фактори дорівнюють нулю. Етапи МГК такі.

1. Знаходження центроїда і перенесення початку координат (0-а головна компонента, рис. 4.1).
2. Знаходження напрямку максимального змінювання даних (1-а головна компонента, рис. 4.2).
3. Якщо залишки великі, обирається новий напрям ортогональний попередньому (2-а головна компонента). Етап 3 повторюють доки шум не стане випадковим хаотичним набором величин.

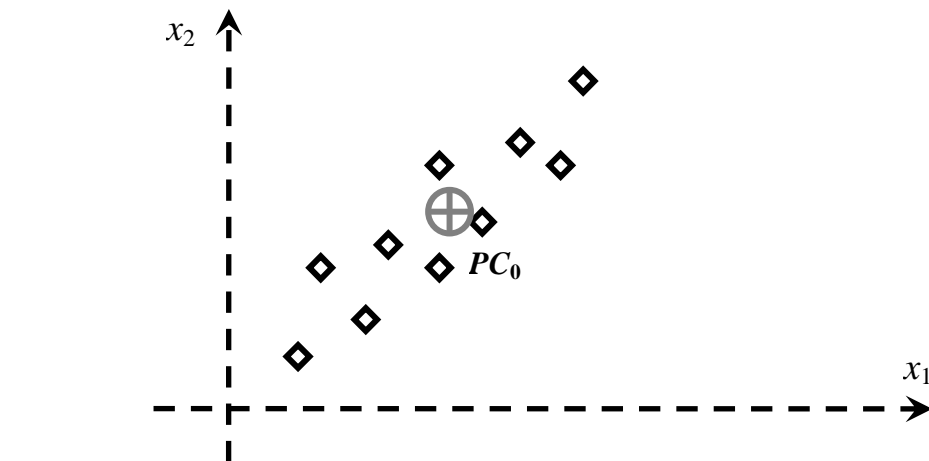


Рисунок 4.1 – Знаходження центроїда

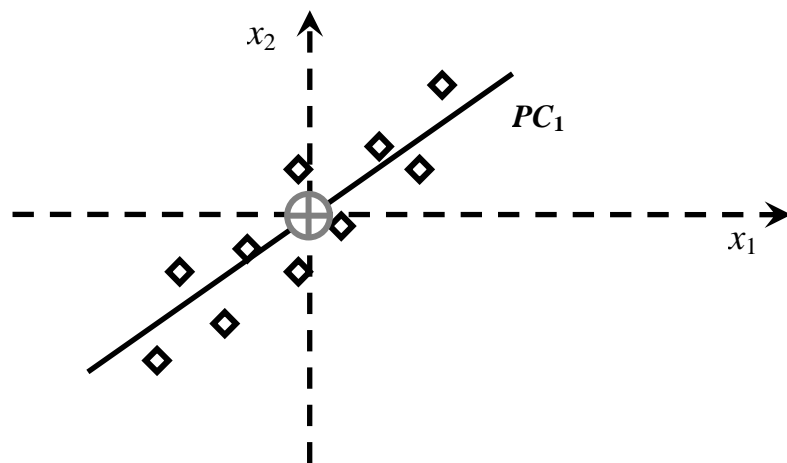


Рисунок 4.2 – 1-а головна компонента

Першою головною компонентою досліджуваної системи ознак  $X$  називається така нормовано-центрована лінійна комбінація цих ознак, яка серед усіх інших нормовано-центрованих лінійних комбінацій змінних має найбільшу дисперсію. Геометрично визначення 1-ї головної компоненти – побудування нової координатної вісі, яка іде у напрямку найбільшого розкиду вихідних даних, тобто у напрямку витягнутості спостережень. Потім серед

<sup>6</sup> МГК як окремий випадок факторного аналізу

напрямків ортогональних знайденому обирають напрям найбільшої витягнутості й т.д.  $k$ -ю головною компонентою системи ознак  $X$  називається така нормовано-центрована лінійна комбінація цих змінних, яка не корельована з  $k-1$  попередніми головними компонентами і серед усіх інших нормовано-центрованих і не корельованих з попередніми  $k-1$  головними компонентами лінійних комбінацій ознак  $x_1, x_2, \dots, x_p$  має найбільшу дисперсію.

МГК-перетворення:

$$X \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n,1 & \dots & n,p \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n,1 & \dots & n,m \end{pmatrix} \times PC^T \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m,1 & \dots & m,p \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n,1 & \dots & n,p \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

де  $n$  – кількість об'єктів,  $p$  – кількість ознак,  $m$  – кількість головних компонент,  $m \leq \min(n, p)$ .

Розкладання за головними компонентами:

$$X \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n,1 & \dots & n,p \end{pmatrix} = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ n \end{pmatrix} \times PC_1^T (1 \quad \dots \quad p) + \\ + \dots + S_m \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ n \end{pmatrix} \times PC_m^T (1 \quad \dots \quad p) + E \begin{pmatrix} 1,1 & \dots & 1,p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n,1 & \dots & n,p \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

де  $pc_t$  –  $t$ -а головна компонента,  $t = \overline{1, m}$ .

Матриця рахунків

$$S(n, m) = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nm} \end{pmatrix} = \quad (4.7)$$

де  $i$ -й рядок – координати  $i$ -го об'єкту в новій системі координат,  $j$ -й стовпець – проекція усіх об'єктів на одну ( $j$ -у) вісь головних компонент,  $PC(p, m)$  – матриця переходу з простору  $X$  у простір головних компонент (матриця навантажень), залишки  $E(n, p)$  ( $\neq$  невязка  $E$ ,  $E^0$  – похибка для 0-ї головної компоненти, тобто для центрованої матриці  $X$ ,  $e_i$  – відстань від вихідного об'єкту до підпростору головних компонент).

Аналізуючи змінювання відносної частки дисперсії, що вноситься першими головними компонентами, можна визначити кількість компонент, які доцільно залишити (звичайно 90 % / 10 %).



## Комп'ютерна практична робота № 2.5

### Визначення достатності кількості виділених факторів

**Метою роботи** є засвоєння основних етапів факторного аналізу, опанування методів факторизування кореляційної матриці, критеріїв достатності кількості виділених факторів для пояснення кореляційної матриці, методів ортогонального обертання; вироблення досвіду факторизування кореляційної матриці та критеріями достатності кількості виділених факторів.

**Завдання.** За даними індивідуального завдання (Додаток Д) виконати факторний аналіз. Розрахунки провести у середовищі STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості.

*Основні етапи факторного аналізу:*

- (1) Обчислення кореляційної матриці.
- (2) Визначення факторів (факторизування кореляційної матриці).
- (3) Обертання факторів для спрощення структури.
- (4) Інтерпретування факторів.

*Етап I.* Кореляційна матриця розраховується з використанням коефіцієнту лінійної кореляції Пірсона.

*Етап II.* Факторизування або виділення некорельованих (ортогональних) факторів. Головна мета факторизування у дослідницькому факторному аналізі – визначення мінімальної кількості спільних факторів, які задовільно пояснюють кореляції між спостережуваними змінними.

Методи факторизування кореляційної матриці представлені у середовищі STATISTICA у полі «Extraction method» вкладки «Advanced» діалогового вікна «Define method of factor extraction»:

1. Метод головних компонент (абр. англ. PCA) дає змогу за  $p$  вихідними ознаками виділити  $p$  головних компонент або узагальнених ознак, які є ортогональними. Звичайно кількох перших компонент достатньо для описування всієї вихідної інформації у стислому вигляді.
2. Аналіз головних факторів (абр. англ. PFA).
  - 2.1. Метод спільності (у середовищі STATISTICA вказано «Communalities=multiple R?»). Спільність – доля дисперсії спостережуваних змінних, обумовлена спільними факторами. На діагоналі кореляційної матриці розташовано оцінки квадрата коефіцієнта множинної кореляції  $R^2$  змінної з усіма іншими змінними.

- 2.2. Метод мінімальних залишків (у середовищі STATISTICA вказано «Iterated commun. (MINRES)») є модифікованим методом спільності із застосуванням МНК для мінімізування залишкових сум квадратів.
- 2.3. Метод максимальної правдоподібності (у середовищі STATISTICA вказано «Maximum likelihhod factors»). Кількість факторів відома. Оцінюються навантаження і спільності, які максимізують ймовірність спостережуваної матриці кореляцій. Результат –  $\chi^2$ -тест для перевірення справедливості гіпотези про кількість спільних факторів.
- 2.4. Центроїдний метод (у середовищі STATISTICA вказано «Centroid method»), геометричний, відноситься до спрощених методів факторного аналізу. Кореляція між змінними розглядається як пучок векторів, а спільний фактор геометрично є урівноважувальним вектором, який проходить через центр пучка.
- 2.5. Метод головних осей (у середовищі STATISTICA вказано «Priscipal axis method») – ітераційна процедура розрахунку спільностей за поточними власними значеннями і векторами. Ітерації продовжуються доки мінімальні зміни у спільностях більші заданих.

*Етап III. Обертання факторів.* Будь-який алгоритм факторизування кореляційної матриці дає якийсь один варіант розрахунку факторних навантажень з множини еквівалентних.

*Оптимальне розташування змінних у просторі факторних осей.* У разі факторного аналізу припускають, що існує одне оптимальне положення осей координат, яке відповідає значимим для певного дослідження і добре інтерпретованим факторам. Процес пошуку оптимальної факторної структури є процедурою обертання факторів.

Косокутне обертання – фактори обертаються без накладання умови ортогональності, результуючі фактори корельовано. Ортогональне обертання – фактори некорельовані (рис. 5.1).

Результат обертання – досягнення простої факторної структури (змінні навантажують мінімальну кількість спільних факторів, кожний спільний фактор навантажує деякі змінні та не навантажує інші). Структура є простою якщо рядки матриці факторних навантажень  $A$  мають максимальну кількість нульових елементів. Це дає змогу виділити множину спостережуваних змінних з найбільшим навантаженням на спільному факторі та реально пояснити значення фактора. Найпростішу структуру отримують тоді, коли усі змінні розташовані на відповідних факторних осях, тобто мають

ненульові факторні навантаження тільки за одним фактором, а за іншими – нульові.

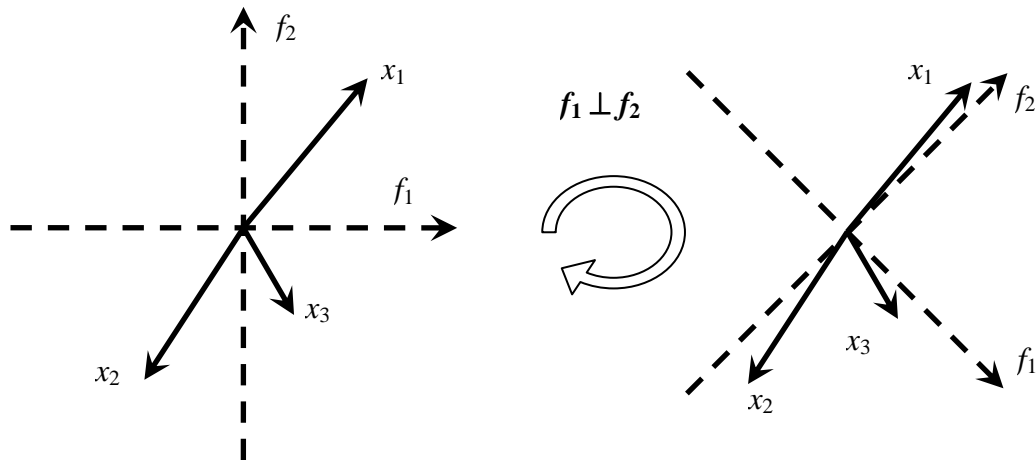


Рисунок 5.1 – Приклад ортогонального обертання: домінує вплив  $f_1$  на  $x_1$ ; розв'язки еквівалентні

**Методи ортогонального обертання.** Варімакс (англ. varimax) мінімізує кількість змінних з високими навантаженнями на певний фактор, що сприяє спрощенню описування фактору за рахунок групування навколо нього тільки тих змінних, які з ним пов'язані у більшій мірі ніж інші. Квартімакс (англ. quartimax) протилежний варімаксу, оскільки мінімізує кількість факторів, необхідних для пояснення певної змінної (інтерпретованість змінних посилюється). Квартімакс-обертання приводить до виділення одного зі спільних факторів з достатньо високими навантаженнями на більшість змінних. Еквімакс (англ. equamax) і біквартімакс (англ. biqurtimax) – комбінації варімакса, який спрощує описування факторів, і квартімакса, який спрощує описування змінних.

**Власне значення** (англ. eigenvalue) – характеристика матриці, яка використовується одночасно як критерій визначення кількості факторів і як міра дисперсії, що відповідає цьому фактору. **Власний вектор** (англ. eigenvector) – вектор, пов'язаний з відповідним власним значенням; у нормованій формі дорівнює факторному навантаженню.

Максимальна кількість факторів дорівнює кількості змінних. Формально-статистичні показники (критерії) достатності кількості виділених факторів для пояснення кореляційної матриці такі.

**Критерій Кайзера.** Розглядаються лише фактори, яким відповідають власні значення кореляційної матриці більші, наприклад, одиниці.

**Критерій каменистого осипу** (критерій Кеттелла). Відкидаються усі фактори, власні значення яких мало відрізняються.

Власне значення характеризує вагу, значимість фактора у знайденому розв'язку, його вклад у дисперсію змінних, яка пояснюється впливом

спільних факторів. Динаміку власного значення факторів оцінюють за графіком. За критерієм Кеттелла виділення факторів закінчується, коли графік перетворюється у горизонтальну лінію (рис. 13.2).

«Хороший» факторний розв'язок дає стільки факторів, щоб вони сумарно пояснювали не менше 70–75 % змінних, а у дослідженнях зі встановленою факторною структурою – 80–90 %.

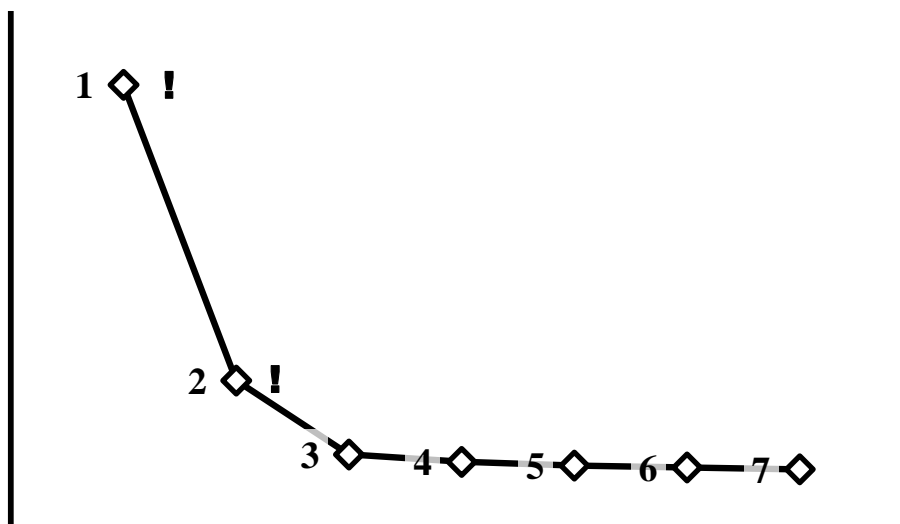


Рисунок 5.2 – Приклад графіку каменистого осипу: осипання уповільнюється найбільше у т. 2, отже можна обмежитись двома факторами

### Послідовність виконання

1. Ортогональне обертання факторів виконати методами варімакс і квартімакс. Вказати «Varimax raw» або «Quartimax raw» у полі «Factor rotation» вкладки «Quick» діалогового вікна «Factor Analysis Results», відповідно.
2. Визначити достатню кількість виділених факторів за допомогою критерію Кеттелла. Графік каменистого осипу отримати за допомогою команди «Scree plot» вкладки «Explained variance» діалогового вікна «Factor Analysis Results».
3. Порівняти отримувані результати для значень критерію Кайзера 1,000 та 0,750. Вказати «Unrotated» у полі «Factor rotation» вкладки «Quick» діалогового вікна «Factor Analysis Results».

### Оформлення звіту

До звіту, серед іншого, додати графік власних значень, таблиці факторних навантажень (команда «Summary: Factor loadings» вкладки «Loadings» діалогового вікна «Factor Analysis Results»), таблиці спільностей (команда «Communalities» вкладки «Loadings» діалогового вікна «Factor Analysis Results») і графіки навантажень (команда «Plot of loadings» вкладки



«Loadings» діалогового вікна «Factor Analysis Results») для випадків без обертання факторів і обертання методами варімакс і квартімакс. Зробити висновки щодо кількості виділених факторів за формально-статистичними критеріями.

### **Контрольні запитання**

1. Основні етапи факторного аналізу.
2. Які методи факторизування кореляційної матриці Ви можете назвати?
3. Критерій Кайзера і критерій Кеттелла достатності кількості виділених факторів для пояснення кореляційної матриці.
4. Які процедури обертання факторів Ви знаєте?
5. Які методи ортогонального обертання Ви знаєте?

## Комп'ютерна практична робота № 2.6

### Дискримінантний аналіз у ППП STATISTICA

**Метою роботи** є опанування процедури покрокового дискримінантного аналізу, засвоєння понять класу і дискримінантної функції, набуття досвіду застосування дискримінантного аналізу для пошуку змінних, які дають змогу віднести аналізовані об'єкти до тієї або іншої групи, інтерпретувати функції дискримінації для двох груп

**Завдання.** За даними індивідуального завдання (Додаток Е) визначити приналежність об'єктів до одного з класів за допомогою дискримінантного аналізу. Розрахунки провести у середовищі STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості<sup>7</sup>.

Багатомірний аналіз даних у системі STATISTICA представлено графічним аналізом даних, описовими статистиками і кореляційним аналізом, дисперсійним аналізом, кластерним аналізом, деревами класифікації, факторним аналізом, тощо, та, серед іншого, дискримінантним аналізом. Дискримінантний аналіз використовують для ухвалення рішення про те, які змінні розділяють (дискримінують) досліджувані об'єкти на групи (класи). У разі застосування дискримінантного аналізу звичайно є кілька змінних і потрібно встановити яка зі змінних впливає на дискримінацію між сукупностями об'єктів. Матрицю загальних дисперсій і коваріацій та матриці внутрішньогрупових дисперсій і коваріацій можна порівняти за допомогою багатомірного  $F$ -критерію для того, щоб визначити, чи є значущими відмінності між класами з точки зору всіх змінних.

Загальновживаним застосуванням дискримінантного аналізу є врахування у дослідженні багатьох змінних з метою *визначення тих з них, які найкращим чином поділяють сукупності між собою*. Тобто потрібно побудувати модель, що дає змогу найкраще передбачити, до якої сукупності буде належати той чи інший об'єкт. Термін «в моделі» використовується для того, щоб позначати змінні, задіяні в прогнозуванні приналежності до сукупності; про невикористовувані для цього змінні говорять, що вони «поза моделлю».

*Дискримінувальна функція* – це деяке вирішальне правило, яке дає змогу віднести певний об'єкт до одного з класів. Закон розподілу ймовірностей одного класу відрізняється від закону розподілу іншого класу параметрами

---

<sup>7</sup> тут і нижче підготовлено з використанням електронного підручника зі статистики компанії StatSoft (URL: <http://www.statsoft.ru/home/textbook/default.htm>).

(середніми значеннями). У покроковому аналізі дискримінувальних функцій «з охопленням» модель дискримінації будують за кроками таким чином. На кожному кроці переглядають усі змінні та знаходять ту з них, яка вносить найбільший вклад у відмінність між сукупностями. Цю змінну потрібно охопити моделлю на цьому етапі та перейти до наступного кроку. Можна також рухатись у зворотному напрямку (покроковий аналіз «з усуванням»). У такому випадку спочатку усі змінні буде охоплено моделлю, а у подальшому на кожному кроці потрібно усувати маловпливові змінні. Можна також скористатись покроковим аналізом « $F$  для охоплення/усування». Ця процедура використовує відповідне значення  $F$ -критерію для охоплення і відповідне значення  $F$ -критерію для усування. Значення  $F$  статистики для змінної вказує на її статистичну значущість у разі дискримінації між сукупностями, тобто, вона є мірою внеску змінної у передбаченні приналежності до сукупності.

Для двох класів дискримінантний аналіз може розглядатися як процедура множинної регресії. Дискримінантний аналіз для двох класів також називається лінійним дискримінантним аналізом Фішера. У разі двох сукупностей використовується лінійний вираз типу  $a + b_1 \times x_1 + b_2 \times x_2 + \dots + b_p \times x_p$ , де  $a$  є константою, і  $b_1 \dots b_p$  – коефіцієнтами регресії. Інтерпретація результатів завдання з двома сукупностями слідує логіці застосування множинної регресії: змінні з найбільшими регресійними коефіцієнтами роблять найбільший внесок у дискримінацію.

Коли проводиться дискримінантний аналіз декількох класів, не потрібно вказувати, яким чином слід комбінувати класи для формування різних дискримінувальних функцій. Можна автоматично визначити деякі оптимальні комбінації змінних, так що перша функція проведе найкращу дискримінацію між усіма класами, друга функція буде другим найкращою і т.д. Ці функції будуть незалежними або ортогональними, тобто їхній внесок у розділення сукупностей не буде перекриватися. Максимальне число функцій дорівнюватиме числу класів мінус один або числу змінних в аналізі в залежності від того, яке з цих чисел менше. Отримані коефіцієнти  $b_i$  для кожної змінної і для кожної дискримінувальної функції можна інтерпретувати таким чином: чим більший коефіцієнт, тим більшим є внесок відповідної змінної у дискримінацію сукупностей.

Отриману модель, визначені дискримінувальні функції, можна використати для *класифікування об'єктів*. Апостеріорною називається класифікація об'єктів вибірки, на основі якої отримано дискримінувальні функції, апріорною – класифікація об'єктів нової вибірки. *Класифікувальні*

функції призначено для визначення класу, до якого може бути віднесено той чи інший об'єкт.

### Послідовність виконання

1. Створити таблицю даних (spreadsheet), яка міститиме перших 12 об'єктів й охоплюватиме змінні  $x_1 - x_5$ . У діалоговому вікні «Discriminant Function Analysis: *Im'ya faylu danih*» вказати змінні  $x_1 - x_4$  як незалежні, а змінну  $x_5$  як групувальну, а також задати коди для групувальної змінної у вікні «Select codes for grouping variable» (задати «All»).
2. Зробити висновки щодо отриманої статистики для змінних «в моделі» на основі значень основних параметрів представлених у вікні «Discriminant Function Analysis Results» (кількість змінних «в моделі», значення  $\Lambda^8$ , наближене значення статистики  $F$ -критерію та розрахований для нього рівень значимості), а також звітної таблиці аналізу дискримінувальних функцій, яку можна отримати за допомогою команди «Summary: Variables in the model» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results».
3. Визначити відстань між групами за допомогою команди «Distances between groups» на вкладці «Advanced» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results».
4. Отримати за допомогою команди «Classification matrix» вкладки «Classification» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results» інформацію про кількість об'єктів у кожній групі на основі апостеріорної класифікації, а також результати апостеріорної класифікації кожного об'єкту за допомогою команди «Classification of cases» вкладки «Classification» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results», де перший стовпець відображає до якого класу належить об'єкт.
5. Визначити відстані від об'єктів 1–12 до центрів груп за допомогою команди «Squared Mahalanobis distances» вкладки «Classification» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results». Визначити апостеріорні ймовірності приналежності об'єктів 1–12 до певного класу за допомогою команди «Posterior Probabilities» вкладки «Classification» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results». Зробити висновки на основі значень відстаней та апостеріорних ймовірностей.

---

<sup>8</sup> Статистика «Wilks' Lambda» (лямбда Уїлкса) слугує для перевірки якості дискримінації. Значення близькі до 0 свідчать про високу якість моделі, до 1 – про низьку.

## **Оформлення звіту**

Звіт за результатами роботи повинен містити значення основних отриманих параметрів, звітну таблицю аналізу дискримінувальних функцій, відстань між групами, результати апостеріорної класифікації, відстані від об'єктів до центрів груп та апостеріорні ймовірності.

## **Контрольні запитання**

1. Назвіть дві основні задачі вирішувані за допомогою дискримінантного аналізу.
2. Що означають терміни «в моделі» й «поза моделлю» у дискримінантному аналізі?
3. Поясніть що таке дискримінувальна функція, класифікувальна функція.
4. Запишіть дискримінувальну функцію для двох класів.
5. Що означає термін «апостеріорна класифікація»?

## Комп'ютерна практична робота № 2.7

### Класифікація спостережень на основі дискримінантного аналізу даних

**Метою роботи** – опанувати можливості використання дискримінантного аналізу для класифікування спостережень, набуті досвіду проведення дискримінантного аналізу для класифікування об'єктів.

**Завдання.** За даними індивідуального завдання (Додаток Е) визначити приналежність об'єктів 13-18 до одного з класів за допомогою дискримінантного аналізу. Розрахунки провести у середовищі STATISTICA.

#### Короткі теоретичні відомості

Умови моделі дискримінації:

- кількість класів повинна бути не менше двох, кількість об'єктів у кожному з класів – не менше двох;
- дискримінантних змінних повинно бути не менше однієї, але не більше кількості об'єктів – 2;
- дискримінантні змінні є лінійно незалежними, вимірюються інтервальними шкалами і підпорядковані багатомірному нормальному закону розподілу всередині класів.

Нехай  $g$  – кількість класів,  $p$  – кількість дискримінантних змінних,  $n_k$  – кількість об'єктів у  $k$ -у класі,  $n$  – кількість усіх об'єктів,  $x_{ikm}$  – значення змінної  $i$  для  $m$ -го об'єкту в  $k$ -у класі,  $\bar{x}_{ik}$  – середнє значення  $i$ -ї змінної у  $k$ -у класі,  $\bar{x}_i$  – середнє значення  $i$ -ї змінної. Матриця розсіювання  $T$  дає змогу зробити висновки щодо ступеню відмінності між об'єктами в усіх класах. Елементи матриці визначають як:

$$T(x_i, x_j) = t_{ij} = \sum_{k=1}^g \sum_{m=1}^{n_k} (x_{ikm} - \bar{x}_i)(x_{jkm} - \bar{x}_j), \quad (7.1)$$
$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^g n_k \bar{x}_{ik}, \quad \bar{x}_{ik} = \frac{1}{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} x_{ikm}, \quad i=1,2,\dots,p, \quad k=1,2,\dots,g.$$

Позначимо випадкову векторну змінну для усіх класів як  $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_g]$ , загальне середнє цієї змінної  $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_g]$ , тоді матрицю розсіювання від середнього можна записати у вигляді

$$T = \sum_{k=1}^g (X_k - \bar{x})(X_k - \bar{x})^T$$

або

$$T = (X - \bar{x})(X - \bar{x})^T.$$

Матриця  $T$  містить інформацію стосовно розподілу точок у просторі змінних. Діагональні елементи є сумами квадратів відхилень від загального середнього і показують як поведуть себе об'єкти за певною змінною. Позадіагональні елементи є сумами добутків відхилень за однією змінною на відхилення за іншою. Якщо матрицю  $T$  поділити на  $n - 1$ , то отримаємо коваріаційну матрицю.

Для оцінювання ступеню розсіювання об'єктів всередині класів використовують матрицю  $W$ , елементи якої визначають як

$$W(x_i, x_j) = w_{ij} = \sum_{k=1}^g \sum_{m=1}^{n_k} (x_{ikm} - \bar{x}_{ik})(x_{jkm} - \bar{x}_{jk}) \quad (7.2)$$

або  $W = \sum_{k=1}^g (X_k - \bar{x}_k)(X_k - \bar{x}_k)^T.$

Якщо елементи матриці  $W$  поділити на  $n - g$ , то отримаємо оцінку коваріаційної матриці внутрішньогрупових даних.

Коли центроїди різних класів співпадають, то елементи матриць  $T$  і  $W$  будуть однаковими. Інакше деяка різниця  $B = T - W$  визначатиме міжгрупову суму квадратів відхилень і попарних добутків. Матриці  $W$  і  $B$  містять інформацію стосовно залежностей всередині класів і між класами. Одна із задач дискримінантного аналізу полягає у кращому розділенні об'єктів на класи за допомогою визначення коефіцієнтів дискримінувальних функцій на основі максимізування відношення міжгрупової матриці розсіювання до внутрішньогрупової матриці розсіювання за умови ортогональності дискримінантних площин.

Друга з основних задач дискримінантного аналізу полягає у відновленні приналежності або присвоюванні об'єкту до одного із заданих класів на основі ознак цього об'єкту. З цією метою необхідно визначити функції класифікації.

Функцій класифікації стільки ж скільки й класів. Кожна така функція дає змогу визначити ваги класифікації для об'єктів й сукупностей:

$$Q_k = c_k + w_{k1} \cdot x_1 + w_{k2} \cdot x_2 + \dots + w_{ki} \cdot x_i + \dots + w_{km} \cdot x_p,$$

де  $c_k$  – константи для  $k$ -ї сукупності,  $w_{ij}$  – ваги для  $i$ -ї змінної для визначення показника класифікації для  $k$ -ї сукупності,  $x_i$  – значення  $i$ -ї змінної для відповідного об'єкту,  $Q_k$  – значення показника класифікації. Об'єкт вважається таким, що належить певному класу, якщо для цього класу отримано найвищий показник класифікації.

### Послідовність виконання

1. Для розрахунків використати таблицю даних, створену під час виконання завдання лабораторної роботи № 14. У діалоговому вікні «Discriminant Function Analysis: *Ім'я файлу даних*» вказати змінні  $x_1 - x_4$  як незалежні, а змінну  $x_5$  як групувальну, а також задати коди для групувальної змінної.
2. За допомогою команди «Classification functions» вкладки «Classification» діалогового вікна «Discriminant Function Analysis Results» отримати таблицю класифікувальних функцій. Функції класифікації записати у протокол у вигляді

$$w_{11} \cdot x_1 + w_{12} \cdot x_2 + w_{13} \cdot x_3 + w_{14} \cdot x_4 + c_1,$$

$$w_{21} \cdot x_1 + w_{22} \cdot x_2 + w_{23} \cdot x_3 + w_{24} \cdot x_4 + c_2,$$

3. Для кожного з об'єктів 13-18 визначити значення показників класифікації, на основі яких зробити висновок щодо приналежності об'єктів до одного з класів.

### Оформлення звіту.

Хід аналізу повинен містити таблицю і рядковий запис класифікувальних функцій, таблицю значень показників класифікації та приналежності об'єктів до класів.

### Контрольні запитання

1. Наведіть основні умови моделі лінійної дискримінації.
2. Як визначити значення елементів міжгрупової матриці розсіювання?
3. Як визначити значення елементів внутрішньогрупової матриці розсіювання?
4. Поясніть яку інформацію можуть надати матриці розсіювання стосовно залежностей всередині класів і між класами.
5. Як віднести новий об'єкт до одного із заданих класів на основі значень показників класифікації?



## Рекомендована література

1. *Айвазян, С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика в задачах и упражнениях. М., 2001. 270 с.
2. *Бахрушин В.Є.* Методи аналізу даних. Запоріжжя : КПУ, 2011. 268 с.
3. *Буреева Н.Н.* Многомерный статистический анализ с использованием ППП «STATISTICA». Нижний Новгород, 2007. 112 с.
4. *Дубров А. М. и др.* Многомерные статистические методы. М., 2003. 352 с.
5. *Дуброва Т.А., Бажин А.Г., Бакуменко Л.П.* Факторный анализ с использованием ППП Statistica. М., 2000.
6. *Ромакін В.В.* Комп'ютерний аналіз даних. Миколаїв : Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2006. 144 с.
7. *Факторный, дискриминантный и кластерный анализ.* Дж.-О. Ким, Ч. У. Мьюллер, У. Р. Клекка и др.; пер. с англ. А. М. Хотинского, С. Б. Королева; под ред. И. С. Енюкова. Москва: Финансы и статистика, 1989. 215 с.

## Додаток А.

### Заходи безпеки під час проведення практичних занять

Цикл лабораторних робіт виконується в комп'ютерному класі кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету, де розміщено персональні комп'ютери. Обладнання живиться електричним струмом напругою 220 В. Тому під час виконання лабораторних робіт слід дотримуватися заходів безпеки наступних інструкцій.

### ІНСТРУКЦІЯ

*з техніки безпеки при навчанні студентів на ПЕОМ в учбових лабораторіях  
кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів  
хіміко-технологічного факультету*

1. Знання і суворе дотримання цих правил є обов'язковим для всіх осіб, допущених до роботи на ПЕОМ. Доведення їх до кожного зі студентів підтверджується особистим підписом кожного з них у контрольному листі з техніки безпеки. Особи, які не одержали такого інструктажу та не поставили підпис у контрольному листі з техніки безпеки, до роботи на ПЕОМ не допускаються.
2. Усі роботи в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП проводяться лише з дозволу викладача або співробітника кафедри.
3. Під час проведення занять в учбовій лабораторії не повинні знаходитися сторонні особи, в тому числі студенти інших груп. Студенти не повинні самовільно залишати учбову лабораторію під час занять.
4. Під час роботи на ПЕОМ слід пам'ятати, що в них використовується напруга, небезпечна для життя.
5. Всі особи, працюючі в учбових лабораторіях кафедри КХТП, повинні бути ознайомлені з правилами надання першої медичної допомоги при ураженні електричним струмом.
6. Перед вмиканням ПЕОМ кожен з працюючих повинен отримати дозвіл викладача або співробітника кафедри.
7. У випадках виникнення короткого замикання, горіння, диму, вогню в апаратурі, пристрій необхідно негайно вимкнути з мережі та доповісти викладачеві або співробітникам кафедри. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.
8. У випадку виходу з ладу обладнання або програмного забезпечення, що зумовлені іншими причинами, доповісти викладачеві або співробітникам

кафедри. Вимикати апаратуру при цьому не дозволяється. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.

9. Працюючі в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП несуть майнову та адміністративну відповідальність за збереження та використання обладнання, наданого для їх праці.

10. Категорично забороняється:

- самостійно вмикати та вимикати тумблери на щитку електроживлення;
- несанкціоновано вмикати електрообладнання;
- приносити та вмикати своє обладнання та пристрої, встановлювати власне програмне забезпечення;
- залишати без нагляду увімкнені пристрої та лабораторію;
- пересувати обладнання та комплектуючі;
- підключати та відключати інформаційні кабелі та кабелі живлення;
- використовувати власні носії інформації без дозволу викладачів або співробітників кафедри;
- знаходитись в учбовій лабораторії у верхньому одязі.
- після закінчення занять обладнання не вимикається, робоче місце має бути прибрано працюючим та перевірено викладачем або співробітником кафедри.

## ІНСТРУКЦІЯ

*про міри пожежної безпеки у лабораторіях, учбових та робочих приміщеннях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету*

1. Всі студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила пожежної безпеки в КПП ім. Ігоря Сікорського».
2. Завідуючий кафедрою та завідуючий лабораторією відповідають за забезпечення пожежної безпеки всіх приміщень кафедри та за справність протипожежного обладнання та сигналізації.
3. Усе електричне обладнання, яке знаходиться в лабораторіях та приміщеннях кафедри, повинно мати заземлення.
4. У всіх приміщеннях необхідно дотримуватись чистоти, не займати приміщення непотрібними меблями, обладнанням та матеріалами.
5. Усі двері основних та додаткових виходів утримувати у стані швидкого відкривання.
6. Зберігання та використання горючих та легкоспалахуючих рідин у приміщеннях кафедри забороняється.

7. Ремонт електричного обладнання проводити у строгій відповідності з правилами пожежної безпеки.
8. Усі електрозахисти повинні знаходитися у закритому положенні, не займаними сторонніми предметами.
9. Коридори, проходи, тамбури, евакуаційні виходи та підходи до першочергових засобів пожежогасіння, а також комунікаційні ніші повинні бути постійно вільними, чистими та нічим не зайнятими.
10. Відповідальні особи перед закриттям приміщень повинні ретельно оглянути їх, забезпечити прибирання виробничих відходів, перевірити якість перекриття води, газу, відключити напругу електромережі, перевірити стан пожежної сигналізації та засобів пожежогасіння.
11. Від усіх приміщень мати два комплекти ключів. Один комплект здавати черговому, а інший – зберігати в певному місці, яке відомо обслуговуючому персоналу.

Студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила техніки безпеки в КПП ім. Ігоря Сікорського, про що вони ставлять свій підпис у відповідному контрольному листі з техніки безпеки перед початком проведення циклу лабораторних робіт. Студенти, які не пройшли інструктаж і не поставили підпис у контрольному листі, до роботи не допускаються.

## **Додаток Б.**

### **Вимоги до оформлення звіту за результатами виконання завдань у рамках практичного заняття**

Звіт повинен містити титульний аркуш, копію загального завдання, короткі теоретичні відомості, хід виконання завдання(нь) практичного заняття, висновки.

Протокол оформлюється на аркушах формату А4 шрифтом Times New Roman 14 розміру (інтервал абзаців – полуторний (1,5), вирівнювання – за шириною, поля сторінок: ліве, верхнє, нижнє – 20 мм, праве – 10 мм).

Кожну структурну частину звіту потрібно починати з нової сторінки. Першою сторінкою протоколу є титульний аркуш (Додаток В), який включають до загальної нумерації сторінок, але номер сторінки не ставлять. На наступних сторінках номер проставляють у верхньому правому куті.

## Додаток В.

### Зразок титульного листа звіту

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»  
ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів

Звіт з виконання завдань  
на практичному занятті № \_\_\_\_

« \_\_\_\_\_ *Назва заняття* \_\_\_\_\_ »

з кредитного модуля «Спеціальні розділи математики –  
1. Прикладна математична статистика»

Звіт склав(ла)  
студент(ка) гр. ХА–\_1  
*Прізвище І. Пб.*

Прийняв(ла): *Прізвище І. Пб.*

Кількість балів: \_\_\_\_\_

Дата: \_\_\_\_\_

Підпис: \_\_\_\_\_

Київ 2019

## Додаток Г.

### Завдання для кластеризування об'єктів ієрархічними агломеративними методами

Варіант 1, 23		Варіант 2, 24		Варіант 3, 25		Варіант 4, 26	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
3,73	133,23	6,38	265,90	12,30	399,30	15,88	528,15
4,30	140,96	8,80	272,43	11,05	416,11	14,55	528,12
3,96	137,78	6,37	270,34	10,02	409,00	12,55	543,60
3,80	140,82	8,57	278,92	9,69	411,99	15,79	541,52
4,36	140,25	8,84	261,10	11,48	401,79	16,88	557,29
3,03	131,28	6,88	270,62	9,90	406,69	14,97	542,33
7,93	176,99	8,65	276,20	23,18	523,98	14,95	535,22
8,84	171,38	6,74	265,10	24,27	512,67	15,35	537,03
7,09	174,56	8,51	263,34	22,23	531,43	14,61	551,98
8,92	176,37	8,70	277,14	24,36	533,84	15,07	529,69
8,37	177,67	6,51	272,82	22,13	538,64	13,47	555,18
11,14	217,62	8,87	275,09	34,36	659,12	14,07	542,36
12,75	216,95	7,27	275,30	36,85	648,36	16,65	548,32
11,73	211,58	8,67	267,79	33,10	655,53	12,54	532,39
11,54	212,37	22,99	431,91	36,43	644,07	46,78	865,54
12,60	214,06	23,02	421,10	36,53	651,69	48,95	851,14
12,34	212,67	22,80	423,12	33,46	635,65	48,29	873,93
11,06	220,81	22,54	429,84	33,69	640,74	45,84	862,84
11,78	218,59	23,25	426,73	35,53	656,88	45,09	847,88
12,81	213,65	22,81	423,15	36,67	647,26	48,34	861,28

Варіант 5, 27		Варіант 6, 28		Варіант 7, 29		Варіант 8, 30	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
19,56	697,41	22,98	826,23	25,55	979,20	28,04	1110,16
18,45	673,20	21,47	782,52	28,58	958,40	31,44	1096,23
20,88	659,44	22,13	798,31	27,30	911,64	27,89	1086,36
20,94	659,06	24,04	793,15	28,30	929,92	25,75	1079,05
15,33	655,09	18,05	780,37	24,85	978,76	29,15	1084,85
16,65	676,94	19,69	816,61	27,90	956,75	29,18	1043,70
35,22	890,90	23,83	797,84	51,41	1196,18	26,65	1063,17
35,79	894,73	22,84	815,89	49,39	1248,90	30,48	1094,96
39,40	864,88	18,11	803,02	54,41	1253,40	29,79	1049,65
35,52	880,62	24,09	818,81	50,68	1204,55	25,46	1071,75
40,41	873,16	19,32	813,11	52,62	1199,26	24,26	1104,10
58,87	1084,98	20,37	795,62	78,96	1486,14	29,07	1094,74
55,05	1071,95	19,67	783,99	82,51	1514,98	30,66	1091,32
60,88	1053,87	24,73	815,49	82,21	1530,23	30,41	1069,35
58,44	1089,58	71,30	1267,34	78,94	1537,27	89,11	1758,09
56,91	1087,94	70,57	1284,42	84,73	1527,70	92,83	1720,39
56,19	1068,54	68,38	1287,80	79,02	1523,03	92,13	1686,27
57,71	1056,24	68,31	1288,95	82,41	1533,21	91,69	1716,97
57,15	1089,39	69,50	1268,64	77,56	1483,57	92,52	1760,72
60,93	1064,46	67,45	1268,65	83,19	1477,27	93,96	1691,69

Варіант 9, 31		Варіант 10, 32		Варіант 11, 33		Варіант 12, 34	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
32,69	1178,51	35,60	1314,96	41,32	1482,40	38,81	1680,03
27,60	1252,32	36,55	1324,26	41,63	1430,08	39,20	1603,43
33,81	1242,42	38,27	1312,08	35,40	1501,89	48,12	1669,03
27,75	1255,92	32,82	1389,19	44,62	1478,86	38,02	1652,01
36,47	1199,39	33,22	1333,02	38,03	1519,85	44,61	1629,21
31,14	1248,49	35,72	1348,31	33,83	1536,09	45,44	1600,89
65,23	1615,70	31,82	1330,74	84,32	1947,02	42,32	1583,89
72,25	1569,97	32,18	1341,28	86,73	1872,53	38,05	1593,61
69,54	1566,52	38,93	1331,63	87,85	1933,72	44,33	1592,23
70,34	1554,12	31,58	1373,42	78,77	1875,70	37,35	1633,68
63,46	1538,31	34,10	1333,81	86,43	1909,36	41,63	1616,01
100,10	1936,07	30,47	1342,70	132,65	2420,98	43,16	1603,79
107,14	1936,09	40,16	1382,75	129,58	2348,24	46,99	1578,55
100,66	1959,24	31,03	1305,17	127,38	2373,12	44,54	1678,61
107,98	1961,57	114,96	2144,71	132,62	2350,70	136,56	2597,95
104,08	1924,45	111,60	2197,73	127,28	2361,72	134,92	2632,57
103,88	1970,96	110,06	2108,58	125,12	2375,21	141,49	2587,83
108,89	1910,70	118,19	2138,48	131,71	2386,68	143,19	2551,83
108,24	1915,31	111,30	2181,59	125,65	2412,77	133,99	2530,57
107,03	1913,27	116,38	2114,91	130,15	2390,41	133,58	2636,07

Варіант 13, 35		Варіант 14, 36		Варіант 15, 37		Варіант 16, 38	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
43,90	1718,62	45,33	1942,46	48,95	2085,58	60,56	2086,99
50,39	1748,62	56,47	1890,25	54,90	2041,21	55,36	2120,02
48,82	1697,01	46,00	1887,87	45,48	2036,88	60,80	2086,51
46,18	1771,74	45,57	1891,92	47,29	2017,70	64,04	2222,88
50,69	1727,75	46,19	1921,58	47,56	1988,66	57,24	2108,98
46,85	1732,09	48,43	1935,13	50,30	2039,57	63,95	2216,80
97,55	2315,64	45,69	1876,74	108,79	2614,66	63,73	2180,92
96,44	2247,90	45,48	1885,07	106,10	2581,70	55,64	2088,87
100,02	2282,10	49,00	1829,34	116,01	2604,52	62,23	2166,45
99,81	2322,44	49,11	1931,71	119,97	2667,19	58,28	2140,78
91,76	2278,94	47,65	1954,08	106,50	2609,73	63,09	2121,64
144,43	2756,05	51,86	1860,78	170,08	3250,95	51,03	2090,77
148,68	2757,40	51,60	1920,95	170,04	3172,41	64,12	2156,45
154,39	2791,18	55,93	1931,91	168,33	3245,15	52,39	2084,69
144,86	2762,29	158,66	2974,86	179,96	3219,24	177,03	3499,93
154,38	2764,81	163,00	3037,33	170,71	3214,49	191,14	3436,04
151,73	2793,85	155,45	3041,88	167,82	3203,34	176,83	3399,36
143,23	2736,31	160,47	2963,74	178,15	3276,70	189,56	3373,37
156,80	2766,76	163,32	3007,53	175,83	3239,63	182,46	3384,58
154,28	2792,94	163,70	3027,97	180,03	3155,87	188,69	3499,40



Варіант 17, 39		Варіант 18, 40		Варіант 19, 41		Варіант 20, 42	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
68,20	2210,68	58,95	2502,49	62,71	2516,29	70,89	2763,77
55,01	2380,66	66,36	2404,72	58,57	2544,39	61,01	2773,90
61,14	2333,34	58,07	2471,79	75,85	2588,02	73,73	2649,62
53,19	2354,63	54,50	2450,57	63,00	2513,76	75,98	2706,00
60,49	2218,42	63,23	2350,30	69,08	2587,68	72,77	2616,19
61,23	2242,29	58,21	2398,02	59,33	2630,93	73,83	2743,43
125,35	3024,48	69,34	2495,11	138,09	3231,43	77,98	2678,96
120,03	2946,36	54,44	2379,68	148,38	3382,49	71,69	2658,18
135,89	3024,33	66,88	2343,88	137,95	3278,94	70,51	2628,07
120,75	2955,38	61,53	2415,84	134,89	3412,11	76,16	2674,76
120,83	2924,02	72,30	2430,99	138,64	3260,57	77,62	2635,69
195,35	3621,55	71,17	2497,20	221,71	4133,08	76,85	2706,08
187,61	3678,24	61,11	2517,19	226,10	4103,67	62,60	2662,35
198,23	3736,48	64,67	2352,82	221,00	4137,35	75,65	2643,75
199,97	3662,00	200,04	3859,20	222,54	4163,51	236,84	4250,79
189,65	3697,30	211,55	3867,75	220,07	4141,64	230,19	4381,03
201,54	3737,48	200,39	3880,89	225,51	4118,19	230,13	4291,92
190,60	3653,27	211,58	3915,57	226,77	3995,86	236,73	4312,71
189,54	3615,13	207,43	3925,96	222,56	4050,16	240,95	4250,93
194,59	3732,19	210,80	3900,55	218,88	4056,07	220,09	4258,89

Варіант 21, 43		Варіант 22, 44	
X	Y	X	Y
43,90	1718,62	45,33	1942,46
50,39	1748,62	56,47	1890,25
48,82	1697,01	46,00	1887,87
46,18	1771,74	45,57	1891,92
50,69	1727,75	46,19	1921,58
46,85	1732,09	48,43	1935,13
97,55	2315,64	45,69	1876,74
96,44	2247,90	45,48	1885,07
100,02	2282,10	49,00	1829,34
99,81	2322,44	49,11	1931,71
91,76	2278,94	47,65	1954,08
144,43	2756,05	51,86	1860,78
148,68	2757,40	51,60	1920,95
154,39	2791,18	55,93	1931,91
144,86	2762,29	158,66	2974,86
154,38	2764,81	163,00	3037,33
151,73	2793,85	155,45	3041,88
143,23	2736,31	160,47	2963,74
156,80	2766,76	163,32	3007,53
154,28	2792,94	163,70	3027,97

## Додаток Д.

### Завдання для факторного аналізу

Варіант **1, 23**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-1,0	2,1	-0,2	4,8	-0,3	0,8	22,3
2	-4,3	2,9	-0,6	2,9	-1,1	3,6	10,9
3	-10,7	8,6	-1,1	1,7	-1,9	10,8	4,6
4	-11,3	3,5	-1,4	2,4	-2,6	9,6	5,7
5	-11,4	3,0	-1,7	3,1	-3,2	9,3	6,4
6	-15,4	3,3	-2,1	2,8	-4,0	12,7	4,8
7	-25,3	4,8	-2,9	1,8	-5,0	23,3	2,8
8	-27,1	4,3	-3,2	2,0	-5,7	24,0	2,7
9	-23,0	3,4	-3,3	2,9	-6,2	18,8	3,5
10	-25,2	3,4	-3,6	2,9	-6,9	20,6	3,3
11	-36,8	4,2	-4,5	2,1	-8,0	32,1	2,1
12	-46,8	5,6	-5,2	1,7	-9,0	44,2	1,6
13	-36,2	3,7	-5,0	2,6	-9,3	29,9	2,3
14	-34,4	3,5	-5,1	3,0	-9,8	28,0	2,5
15	-46,3	4,0	-6,0	2,4	-10,9	39,1	1,8
16	-72,2	29,7	-7,4	1,3	-12,3	75,3	0,9
17	-51,8	4,1	-6,8	2,4	-12,4	43,5	1,6
18	-43,3	3,6	-6,6	3,1	-12,7	35,3	2,0
19	-54,5	4,0	-7,4	2,6	-13,8	45,1	1,6
20	-106,3	0,9	-9,9	1,0	-15,8	130,3	0,6
21	-70,7	4,5	-8,7	2,1	-15,7	61,2	1,2
22	-52,5	3,7	-8,0	3,2	-15,6	42,8	1,7
23	-62,0	3,9	-8,8	2,8	-16,6	50,8	1,4
24	-147,2	2,3	-12,4	0,7	-19,3	217,5	0,3
25	-94,1	5,2	-10,9	1,8	-19,0	85,6	0,9

Варіант **2, 24**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-4,9	0,6	-0,4	1,6	-0,7	6,9	3,5
2	-4,9	2,8	-0,7	3,2	-1,3	4,0	9,4
3	-6,9	2,7	-1,1	3,4	-2,0	5,6	8,4
4	-13,4	3,8	-1,6	2,2	-2,9	11,7	4,4
5	-27,0	0,6	-2,5	1,0	-3,9	34,3	1,6
6	-17,0	3,4	-2,3	2,7	-4,3	14,0	4,2
7	-16,9	3,1	-2,6	3,2	-5,0	13,8	4,4
8	-25,0	3,7	-3,2	2,4	-5,9	21,1	3,0
9	-42,2	-38,9	-4,3	1,3	-7,1	44,9	1,4
10	-31,1	3,8	-4,1	2,4	-7,4	26,1	2,5
11	-27,6	3,4	-4,1	3,1	-7,9	22,5	2,9
12	-34,8	3,7	-4,7	2,6	-8,9	28,8	2,3
13	-53,6	6,1	-5,9	1,6	-10,1	51,3	1,3
14	-48,0	4,3	-5,9	2,1	-10,6	41,7	1,6
15	-39,4	3,6	-5,7	2,9	-10,9	32,2	2,1
16	-43,6	3,7	-6,2	2,8	-11,7	35,8	1,9
17	-62,6	4,8	-7,4	1,9	-13,0	55,9	1,2
18	-69,0	5,1	-8,0	1,8	-13,9	62,9	1,1
19	-53,1	3,9	-7,4	2,7	-14,0	43,6	1,6
20	-51,8	3,8	-7,6	3,0	-14,6	42,3	1,7
21	-69,9	4,4	-8,8	2,2	-15,9	59,9	1,2
22	-95,6	8,0	-10,2	1,5	-17,3	94,4	0,8
23	-69,2	4,1	-9,3	2,5	-17,2	57,6	1,2
24	-60,0	3,8	-9,0	3,1	-17,4	48,9	1,5
25	-76,3	4,2	-10,1	2,5	-18,7	63,7	1,1

Варіант **3, 25**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-3,0	2,4	-0,5	3,7	-0,9	2,4	11,6
2	-7,3	3,3	-0,9	2,5	-1,7	6,3	6,2
3	-16,4	-2,2	-1,6	1,3	-2,6	18,7	2,5
4	-12,8	3,3	-1,7	2,6	-3,2	10,7	4,7
5	-13,1	3,0	-2,0	3,2	-3,8	10,7	5,1
6	-19,0	3,5	-2,5	2,6	-4,7	15,8	3,6
7	-31,9	8,3	-3,4	1,5	-5,7	31,9	1,9
8	-27,3	3,9	-3,5	2,3	-6,3	23,3	2,6
9	-24,0	3,4	-3,5	3,0	-6,8	19,6	3,2
10	-29,0	3,6	-4,0	2,7	-7,6	23,8	2,7
11	-43,9	5,0	-5,0	1,8	-8,8	40,2	1,6
12	-45,0	4,5	-5,4	2,0	-9,5	40,0	1,6
13	-36,2	3,6	-5,2	2,8	-9,8	29,7	2,2
14	-38,0	3,6	-5,5	2,9	-10,5	31,1	2,1
15	-53,4	4,4	-6,5	2,1	-11,7	46,5	1,5
16	-67,1	5,9	-7,4	1,6	-12,8	63,7	1,1
17	-50,5	3,9	-6,9	2,6	-12,9	41,7	1,6
18	-46,6	3,7	-6,9	3,0	-13,3	38,0	1,8
19	-61,4	4,2	-8,0	2,4	-14,6	51,7	1,3
20	-95,6	85,3	-9,8	1,3	-16,2	100,6	0,7
21	-67,4	4,2	-8,8	2,4	-16,1	56,7	1,2
22	-55,2	3,7	-8,4	3,1	-16,2	45,0	1,6
23	-68,4	4,1	-9,3	2,6	-17,4	56,6	1,2
24	-134,2	1,2	-12,4	0,9	-19,7	166,7	0,4
25	-87,9	4,6	-10,8	2,1	-19,4	76,3	0,9

Варіант **4, 26**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-6,2	4,0	-0,7	2,2	-1,2	5,6	5,5
2	-9,7	3,9	-1,1	2,1	-2,0	8,7	4,5
3	-10,0	3,0	-1,4	2,9	-2,7	8,2	5,7
4	-12,2	3,1	-1,8	3,0	-3,4	10,0	5,0
5	-19,4	3,9	-2,4	2,2	-4,3	16,8	3,2
6	-27,8	5,9	-3,1	1,7	-5,2	26,7	2,1
7	-22,5	3,5	-3,1	2,6	-5,7	18,6	3,1
8	-21,9	3,3	-3,3	3,1	-6,3	17,9	3,3
9	-30,3	3,8	-4,0	2,4	-7,3	25,5	2,4
10	-51,1	-22,3	-5,2	1,3	-8,5	54,7	1,1
11	-37,3	3,9	-4,8	2,4	-8,8	31,5	2,0
12	-31,2	3,4	-4,7	3,1	-9,2	25,5	2,5
13	-39,7	3,8	-5,4	2,6	-10,2	32,8	2,0
14	-82,8	1,2	-7,5	0,9	-11,9	105,9	0,6
15	-55,2	4,4	-6,7	2,1	-12,0	48,1	1,4
16	-40,7	3,5	-6,2	3,2	-12,1	33,2	2,0
17	-48,2	3,8	-6,9	2,8	-13,0	39,4	1,7
18	-112,5	1,9	-9,8	0,8	-15,3	156,6	0,4
19	-77,3	5,3	-8,8	1,8	-15,3	71,2	1,0
20	-50,8	3,7	-7,7	3,1	-15,0	41,4	1,7
21	-56,2	3,8	-8,3	3,0	-15,9	45,8	1,5
22	-114,8	-2,1	-11,2	1,1	-18,2	129,2	0,5
23	-105,6	9,6	-11,2	1,4	-18,8	106,0	0,7
24	-62,0	3,8	-9,3	3,1	-18,0	50,6	1,4
25	-64,3	3,8	-9,7	3,1	-18,7	52,4	1,3

Варіант **5, 27**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-7,2	3,6	-0,9	2,3	-1,5	6,3	5,3
2	-7,4	2,8	-1,1	3,4	-2,2	6,0	6,8
3	-10,9	3,1	-1,6	3,0	-3,0	8,9	5,2
4	-29,4	1,1	-2,6	0,9	-4,1	39,5	1,3
5	-24,1	5,0	-2,7	1,8	-4,7	22,4	2,4
6	-17,3	3,1	-2,6	3,2	-5,1	14,1	3,9
7	-20,7	3,3	-3,1	3,0	-5,9	16,9	3,4
8	-44,7	-5,3	-4,4	1,2	-7,2	49,3	1,2
9	-45,6	11,9	-4,8	1,4	-8,0	46,5	1,3
10	-27,8	3,4	-4,2	3,1	-8,0	22,7	2,7
11	-30,0	3,4	-4,5	3,1	-8,8	24,5	2,6
12	-56,1	7,0	-6,1	1,5	-10,3	54,9	1,2
13	-74,2	-0,1	-7,0	1,0	-11,4	87,5	0,7
14	-39,5	3,6	-5,8	3,0	-11,0	32,2	2,0
15	-39,3	3,5	-6,0	3,2	-11,6	32,1	2,1
16	-65,0	5,0	-7,6	1,8	-13,3	58,9	1,1
17	-115,0	2,2	-9,6	0,7	-14,8	173,8	0,4
18	-52,8	3,8	-7,5	2,8	-14,1	43,3	1,6
19	-49,1	3,6	-7,5	3,2	-14,6	40,1	1,7
20	-72,3	4,5	-9,0	2,1	-16,1	62,4	1,1
21	-119,1	0,7	-11,2	1,0	-17,9	143,8	0,5
22	-68,5	4,1	-9,3	2,6	-17,3	56,8	1,2
23	-59,8	3,8	-9,1	3,1	-17,5	48,8	1,4
24	-78,5	4,3	-10,3	2,4	-18,9	65,8	1,1
25	-120,7	18,9	-12,5	1,3	-20,8	124,8	0,6

Варіант **6, 28**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-5,9	2,7	-0,9	3,4	-1,7	4,8	7,4
2	-11,9	3,7	-1,5	2,3	-2,6	10,3	4,0
3	-24,4	0,4	-2,2	1,1	-3,6	30,4	1,5
4	-15,9	3,4	-2,2	2,7	-4,0	13,2	3,8
5	-15,9	3,1	-2,4	3,2	-4,7	13,0	4,1
6	-23,5	3,7	-3,1	2,4	-5,6	19,8	2,8
7	-39,8	119,1	-4,1	1,3	-6,7	41,9	1,4
8	-30,0	3,8	-3,9	2,4	-7,1	25,3	2,3
9	-26,6	3,4	-4,0	3,1	-7,6	21,7	2,8
10	-33,5	3,7	-4,6	2,6	-8,5	27,7	2,2
11	-51,4	5,8	-5,7	1,6	-9,8	48,8	1,3
12	-47,0	4,3	-5,8	2,1	-10,3	40,9	1,5
13	-38,5	3,6	-5,6	2,9	-10,6	31,5	2,0
14	-42,3	3,7	-6,0	2,8	-11,4	34,7	1,9
15	-60,5	4,7	-7,2	1,9	-12,7	53,9	1,2
16	-68,1	5,2	-7,8	1,8	-13,6	62,4	1,1
17	-52,2	3,9	-7,3	2,7	-13,7	42,9	1,6
18	-50,6	3,7	-7,4	3,0	-14,3	41,3	1,6
19	-68,1	4,3	-8,6	2,2	-15,6	58,1	1,2
20	-94,8	8,7	-10,1	1,4	-17,0	94,5	0,7
21	-68,4	4,1	-9,1	2,5	-16,9	57,0	1,2
22	-58,9	3,8	-8,9	3,1	-17,1	48,0	1,4
23	-74,6	4,2	-10,0	2,5	-18,4	62,2	1,1
24	-130,2	-1,3	-12,6	1,1	-20,5	148,0	0,5
25	-88,0	4,5	-11,1	2,2	-20,2	75,1	0,9

Варіант 7, 29

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-9,0	3,3	-1,2	2,6	-2,1	7,6	4,9
2	-17,8	26,3	-1,8	1,5	-3,0	18,5	2,3
3	-15,2	3,5	-2,0	2,5	-3,6	12,7	3,7
4	-14,4	3,1	-2,2	3,2	-4,2	11,8	4,3
5	-20,2	3,5	-2,7	2,6	-5,1	16,7	3,2
6	-42,7	0,4	-4,0	1,0	-6,3	52,2	1,1
7	-30,5	4,1	-3,8	2,2	-6,8	26,4	2,2
8	-24,1	3,3	-3,7	3,2	-7,1	19,6	3,0
9	-29,9	3,5	-4,2	2,8	-8,0	24,5	2,5
10	-74,4	1,9	-6,3	0,7	-9,7	110,3	0,6
11	-49,3	4,9	-5,7	1,8	-10,0	44,8	1,4
12	-33,9	3,5	-5,2	3,2	-10,0	27,7	2,3
13	-38,9	3,6	-5,7	3,0	-10,9	31,7	2,0
14	-82,9	-0,4	-7,9	1,1	-12,8	96,7	0,7
15	-73,1	7,5	-7,9	1,5	-13,3	71,9	0,9
16	-44,6	3,6	-6,7	3,1	-13,0	36,4	1,8
17	-47,5	3,7	-7,1	3,1	-13,7	38,7	1,7
18	-89,5	10,8	-9,4	1,4	-15,8	90,6	0,7
19	-104,3	-3,4	-10,3	1,2	-16,8	116,0	0,6
20	-56,5	3,8	-8,3	3,0	-16,0	46,1	1,5
21	-56,3	3,7	-8,6	3,1	-16,6	45,9	1,5
22	-94,8	5,5	-10,8	1,7	-18,7	87,8	0,8
23	-147,7	2,0	-13,0	0,8	-20,3	201,4	0,3
24	-70,3	4,0	-10,1	2,8	-19,1	57,5	1,2
25	-65,7	3,8	-10,1	3,2	-19,5	53,6	1,3



Варіант **8, 30**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-18,4	0,7	-1,7	1,1	-2,6	24,0	1,6
2	-11,3	3,1	-1,6	3,0	-3,1	9,3	4,7
3	-12,8	3,0	-2,0	3,3	-3,8	10,4	4,6
4	-22,5	4,1	-2,7	2,1	-4,8	19,9	2,5
5	-42,8	1,3	-3,8	0,9	-5,9	58,3	0,9
6	-23,5	3,5	-3,3	2,7	-6,1	19,4	2,8
7	-22,7	3,3	-3,5	3,2	-6,7	18,5	3,1
8	-33,5	3,9	-4,3	2,3	-7,8	28,5	2,0
9	-56,1	-3,9	-5,5	1,2	-9,0	62,3	1,0
10	-37,7	3,9	-5,0	2,5	-9,2	31,5	1,9
11	-33,3	3,5	-5,0	3,1	-9,7	27,2	2,3
12	-42,9	3,9	-5,8	2,5	-10,7	35,6	1,8
13	-66,1	7,4	-7,1	1,5	-12,1	64,9	1,0
14	-54,8	4,3	-6,9	2,2	-12,4	47,0	1,4
15	-45,2	3,7	-6,6	3,0	-12,7	36,9	1,8
16	-51,2	3,8	-7,2	2,7	-13,5	42,0	1,6
17	-73,9	5,1	-8,6	1,8	-15,0	67,1	1,0
18	-75,8	4,9	-8,9	1,9	-15,7	67,9	1,0
19	-58,7	3,9	-8,3	2,8	-15,7	48,2	1,4
20	-58,9	3,8	-8,6	2,9	-16,4	48,2	1,4
21	-80,3	4,6	-9,9	2,1	-17,8	69,4	1,0
22	-102,1	6,6	-11,2	1,6	-19,1	98,2	0,7
23	-74,8	4,1	-10,2	2,6	-18,9	61,9	1,1
24	-66,7	3,9	-10,0	3,0	-19,2	54,4	1,3
25	-85,8	4,3	-11,2	2,4	-20,6	72,0	1,0

Варіант **9, 31**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-10,8	3,2	-1,5	2,7	-2,7	9,0	4,5
2	-11,6	3,0	-1,7	3,2	-3,4	9,5	4,7
3	-17,4	3,5	-2,3	2,5	-4,2	14,6	3,3
4	-32,8	-5,5	-3,2	1,2	-5,3	36,1	1,4
5	-24,9	3,8	-3,2	2,3	-5,8	21,1	2,5
6	-21,3	3,2	-3,2	3,2	-6,3	17,3	3,2
7	-27,6	3,6	-3,8	2,7	-7,2	22,8	2,5
8	-62,4	1,4	-5,5	0,9	-8,7	83,6	0,7
9	-41,9	4,4	-5,1	2,0	-9,0	36,8	1,6
10	-30,9	3,4	-4,7	3,2	-9,2	25,2	2,4
11	-36,8	3,6	-5,3	2,9	-10,1	30,1	2,1
12	-85,0	1,5	-7,6	0,9	-11,9	112,4	0,6
13	-63,0	5,5	-7,1	1,7	-12,2	58,9	1,1
14	-41,1	3,6	-6,2	3,1	-12,1	33,5	1,9
15	-45,4	3,7	-6,7	3,0	-12,9	37,0	1,7
16	-91,6	-7,0	-9,1	1,2	-15,0	100,1	0,7
17	-90,1	14,5	-9,4	1,4	-15,6	92,5	0,7
18	-52,2	3,7	-7,8	3,1	-15,1	42,6	1,6
19	-53,9	3,7	-8,2	3,1	-15,8	44,0	1,5
20	-96,9	7,0	-10,5	1,5	-17,9	94,1	0,7
21	-126,3	0,4	-11,9	1,0	-19,2	150,7	0,4
22	-64,9	3,9	-9,5	2,9	-18,1	53,0	1,3
23	-62,9	3,8	-9,6	3,1	-18,6	51,3	1,3
24	-101,1	5,2	-11,8	1,8	-20,7	91,2	0,7
25	-178,6	2,5	-14,8	0,7	-22,8	275,5	0,2

Варіант **10, 32**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-9,8	2,9	-1,5	3,3	-2,9	8,0	5,2
2	-18,1	4,0	-2,2	2,1	-3,9	15,9	2,8
3	-35,4	1,2	-3,1	0,9	-4,9	47,5	1,0
4	-20,1	3,4	-2,8	2,7	-5,2	16,6	3,1
5	-19,8	3,2	-3,0	3,2	-5,8	16,1	3,3
6	-29,5	3,9	-3,8	2,3	-6,9	25,0	2,2
7	-49,7	-5,1	-4,9	1,2	-8,1	54,8	1,0
8	-34,2	3,8	-4,5	2,5	-8,3	28,6	2,0
9	-30,4	3,4	-4,6	3,1	-8,8	24,8	2,4
10	-39,1	3,8	-5,3	2,6	-9,8	32,5	1,9
11	-60,5	7,1	-6,5	1,5	-11,1	59,1	1,0
12	-51,0	4,2	-6,4	2,2	-11,5	43,8	1,4
13	-42,1	3,6	-6,2	3,0	-11,8	34,4	1,8
14	-47,6	3,8	-6,7	2,8	-12,6	39,1	1,6
15	-68,9	5,0	-8,0	1,8	-14,0	62,4	1,0
16	-71,6	4,9	-8,4	1,9	-14,8	64,4	1,0
17	-55,6	3,9	-7,9	2,8	-14,9	45,6	1,4
18	-55,6	3,8	-8,1	2,9	-15,5	45,4	1,5
19	-75,7	4,5	-9,4	2,1	-16,9	65,4	1,0
20	-97,7	6,8	-10,7	1,6	-18,2	94,3	0,7
21	-71,5	4,1	-9,7	2,6	-18,0	59,2	1,1
22	-63,5	3,8	-9,5	3,0	-18,3	51,8	1,3
23	-81,7	4,3	-10,7	2,4	-19,7	68,5	1,0
24	-131,6	-11,1	-13,2	1,2	-21,7	142,3	0,5
25	-90,6	4,4	-11,7	2,3	-21,3	76,6	0,9

Варіант **11, 33**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-13,0	3,3	-1,8	2,7	-3,3	10,8	3,9
2	-29,5	0,2	-2,7	1,1	-4,4	36,1	1,3
3	-22,2	3,9	-2,7	2,2	-4,9	19,2	2,6
4	-18,2	3,1	-2,8	3,2	-5,4	14,8	3,5
5	-23,3	3,4	-3,3	2,8	-6,2	19,1	2,8
6	-59,3	1,8	-5,0	0,7	-7,7	88,0	0,6
7	-40,1	4,8	-4,6	1,9	-8,1	36,4	1,6
8	-28,0	3,4	-4,3	3,2	-8,3	22,9	2,6
9	-32,6	3,5	-4,8	3,0	-9,1	26,6	2,3
10	-70,4	-0,5	-6,7	1,1	-10,9	82,1	0,7
11	-62,7	7,4	-6,7	1,5	-11,4	61,6	1,0
12	-38,6	3,5	-5,8	3,1	-11,2	31,5	2,0
13	-41,4	3,6	-6,2	3,1	-12,0	33,8	1,9
14	-78,7	10,8	-8,3	1,4	-13,9	79,7	0,8
15	-92,3	-3,5	-9,1	1,2	-14,8	102,6	0,6
16	-50,3	3,7	-7,4	3,0	-14,2	41,0	1,6
17	-50,4	3,7	-7,7	3,1	-14,9	41,1	1,6
18	-85,2	5,5	-9,7	1,7	-16,8	78,9	0,8
19	-133,4	1,9	-11,7	0,8	-18,4	181,8	0,4
20	-63,7	3,9	-9,1	2,8	-17,3	52,2	1,3
21	-59,8	3,8	-9,2	3,2	-17,8	48,8	1,4
22	-90,5	4,7	-11,0	2,0	-19,6	79,3	0,8
23	-152,0	1,7	-13,7	0,9	-21,6	197,9	0,3
24	-79,6	4,1	-11,0	2,6	-20,5	65,6	1,0
25	-70,3	3,9	-10,7	3,1	-20,7	57,3	1,2

Варіант 12, 34

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-23,7	-7,5	-2,4	1,3	-3,9	25,8	1,7
2	-18,1	3,5	-2,4	2,5	-4,4	15,2	3,1
3	-17,2	3,2	-2,6	3,1	-5,0	14,1	3,6
4	-23,4	3,6	-3,2	2,6	-5,9	19,4	2,7
5	-37,7	6,6	-4,1	1,6	-7,0	36,7	1,5
6	-33,5	4,1	-4,2	2,2	-7,5	28,9	1,9
7	-28,5	3,5	-4,2	3,0	-8,0	23,3	2,5
8	-32,9	3,6	-4,6	2,8	-8,8	27,0	2,2
9	-48,7	4,8	-5,7	1,9	-10,0	43,9	1,4
10	-52,4	4,8	-6,1	1,9	-10,7	47,3	1,3
11	-41,3	3,7	-5,8	2,8	-11,0	33,9	1,8
12	-41,7	3,6	-6,1	2,9	-11,6	34,1	1,8
13	-57,5	4,3	-7,2	2,2	-12,9	49,5	1,3
14	-76,2	6,9	-8,3	1,5	-14,1	74,0	0,9
15	-56,2	4,0	-7,6	2,6	-14,1	46,7	1,4
16	-50,2	3,7	-7,5	3,1	-14,5	41,0	1,6
17	-65,0	4,2	-8,6	2,4	-15,7	54,5	1,2
18	-107,2	-7,3	-10,7	1,2	-17,5	117,0	0,6
19	-74,2	4,3	-9,5	2,3	-17,4	62,8	1,1
20	-58,9	3,8	-9,0	3,1	-17,3	48,0	1,4
21	-71,7	4,1	-9,9	2,6	-18,5	59,2	1,1
22	-150,0	1,8	-13,4	0,8	-21,1	197,9	0,3
23	-96,1	4,8	-11,6	2,0	-20,7	84,3	0,8
24	-68,2	3,8	-10,4	3,2	-20,2	55,6	1,2
25	-78,2	4,0	-11,2	2,8	-21,3	64,0	1,1

Варіант **13, 35**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-21,2	5,1	-2,4	1,8	-4,1	19,9	2,2
2	-15,4	3,1	-2,3	3,2	-4,5	12,5	3,8
3	-18,5	3,2	-2,7	3,1	-5,3	15,1	3,3
4	-40,0	-11,0	-4,0	1,3	-6,6	43,3	1,2
5	-42,7	17,9	-4,4	1,4	-7,4	44,1	1,2
6	-25,9	3,4	-3,9	3,1	-7,5	21,1	2,6
7	-27,9	3,4	-4,2	3,1	-8,2	22,8	2,5
8	-51,9	6,4	-5,7	1,6	-9,6	50,1	1,2
9	-71,4	0,4	-6,7	1,0	-10,7	86,2	0,7
10	-37,6	3,6	-5,5	2,9	-10,5	30,7	2,0
11	-37,3	3,5	-5,7	3,2	-11,1	30,4	2,0
12	-61,1	4,8	-7,2	1,9	-12,6	55,0	1,1
13	-110,0	2,2	-9,2	0,7	-14,2	166,5	0,4
14	-51,0	3,8	-7,2	2,8	-13,5	41,9	1,5
15	-47,2	3,6	-7,2	3,2	-14,0	38,5	1,7
16	-68,7	4,4	-8,6	2,2	-15,5	59,1	1,1
17	-112,5	0,1	-10,7	1,0	-17,2	132,7	0,5
18	-66,7	4,1	-9,0	2,5	-16,7	55,4	1,2
19	-58,0	3,8	-8,8	3,1	-16,9	47,3	1,4
20	-75,2	4,2	-9,9	2,4	-18,3	62,9	1,1
21	-115,0	12,6	-12,0	1,4	-20,1	117,3	0,6
22	-85,7	4,4	-11,0	2,3	-20,0	72,7	0,9
23	-70,3	3,9	-10,4	3,0	-20,0	57,4	1,2
24	-81,2	4,1	-11,2	2,7	-21,1	66,9	1,0
25	-117,2	5,8	-13,3	1,7	-22,9	109,0	0,6

Варіант **14, 36**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-15,5	3,2	-2,2	2,9	-4,2	12,7	3,6
2	-17,6	3,2	-2,6	3,0	-4,9	14,4	3,4
3	-26,5	4,0	-3,3	2,2	-5,8	22,9	2,2
4	-36,0	5,9	-4,0	1,6	-6,8	34,4	1,5
5	-28,3	3,6	-3,9	2,6	-7,2	23,5	2,3
6	-27,0	3,4	-4,0	3,1	-7,8	22,1	2,5
7	-36,8	3,9	-4,8	2,4	-8,8	30,9	1,9
8	-60,4	-39,9	-6,1	1,3	-10,1	64,3	0,9
9	-43,6	4,0	-5,6	2,4	-10,3	36,7	1,6
10	-36,2	3,5	-5,5	3,1	-10,6	29,5	2,1
11	-45,7	3,8	-6,3	2,6	-11,7	37,8	1,6
12	-93,5	1,2	-8,5	0,9	-13,5	118,5	0,5
13	-62,0	4,5	-7,6	2,1	-13,6	54,0	1,2
14	-45,6	3,6	-7,0	3,2	-13,5	37,2	1,7
15	-53,7	3,8	-7,7	2,8	-14,5	44,0	1,5
16	-125,6	2,0	-10,8	0,8	-16,9	176,9	0,4
17	-84,8	5,3	-9,7	1,8	-16,9	77,9	0,8
18	-55,7	3,7	-8,5	3,1	-16,5	45,4	1,4
19	-61,5	3,8	-9,1	3,0	-17,3	50,2	1,3
20	-125,7	-1,6	-12,2	1,1	-19,9	142,5	0,5
21	-113,9	9,2	-12,1	1,4	-20,4	113,9	0,6
22	-66,9	3,8	-10,1	3,1	-19,4	54,6	1,2
23	-69,4	3,9	-10,4	3,1	-20,2	56,6	1,2
24	-126,4	8,7	-13,5	1,4	-22,7	125,7	0,5
25	-152,5	-0,9	-14,8	1,1	-23,9	174,2	0,4

Варіант **15, 37**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-14,7	3,0	-2,3	3,2	-4,4	12,0	3,9
2	-26,0	4,3	-3,1	2,0	-5,4	23,2	2,1
3	-49,6	1,6	-4,2	0,8	-6,6	71,7	0,7
4	-25,5	3,5	-3,6	2,8	-6,7	20,9	2,5
5	-24,6	3,3	-3,8	3,2	-7,3	20,1	2,7
6	-36,9	4,0	-4,7	2,2	-8,4	31,6	1,8
7	-62,2	-1,1	-6,0	1,1	-9,7	71,5	0,8
8	-39,5	3,8	-5,3	2,5	-9,8	32,9	1,8
9	-35,2	3,5	-5,3	3,1	-10,2	28,7	2,1
10	-46,1	3,9	-6,1	2,5	-11,3	38,4	1,6
11	-71,6	9,3	-7,6	1,4	-12,7	71,8	0,9
12	-56,4	4,2	-7,2	2,3	-13,0	48,0	1,3
13	-46,8	3,7	-6,9	3,0	-13,2	38,2	1,7
14	-54,2	3,9	-7,5	2,7	-14,2	44,6	1,4
15	-78,9	5,3	-9,0	1,8	-15,7	72,6	0,9
16	-77,0	4,8	-9,2	2,0	-16,3	68,2	0,9
17	-60,2	3,9	-8,6	2,8	-16,3	49,3	1,3
18	-61,7	3,9	-8,9	2,9	-17,0	50,5	1,3
19	-84,8	4,7	-10,4	2,1	-18,5	74,0	0,9
20	-102,8	6,1	-11,5	1,6	-19,7	97,1	0,7
21	-75,9	4,1	-10,4	2,6	-19,5	62,7	1,1
22	-69,3	3,9	-10,3	3,0	-19,8	56,5	1,2
23	-90,0	4,4	-11,6	2,3	-21,3	75,9	0,9
24	-136,1	32,5	-14,0	1,3	-23,2	142,2	0,5
25	-94,9	4,4	-12,4	2,4	-22,7	79,7	0,9



Варіант **16, 38**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-18,2	3,3	-2,5	2,8	-4,8	15,0	3,2
2	-45,2	1,5	-3,9	0,8	-6,1	64,0	0,8
3	-31,0	4,3	-3,7	2,0	-6,5	27,5	1,9
4	-23,1	3,3	-3,5	3,2	-6,8	18,8	2,8
5	-27,8	3,5	-4,0	2,9	-7,7	22,8	2,4
6	-64,0	1,0	-5,9	0,9	-9,3	80,9	0,7
7	-51,3	5,8	-5,7	1,6	-9,8	48,7	1,2
8	-33,3	3,5	-5,0	3,1	-9,8	27,1	2,2
9	-36,9	3,5	-5,5	3,0	-10,6	30,1	2,0
10	-73,7	-54,8	-7,5	1,3	-12,3	78,3	0,8
11	-77,5	70,3	-7,9	1,3	-13,1	81,5	0,8
12	-44,4	3,6	-6,6	3,0	-12,7	36,2	1,7
13	-45,8	3,6	-6,9	3,1	-13,4	37,3	1,7
14	-81,1	6,2	-8,9	1,6	-15,3	77,4	0,8
15	-112,9	1,1	-10,4	0,9	-16,6	140,1	0,5
16	-57,0	3,8	-8,3	2,9	-15,8	46,6	1,4
17	-55,0	3,7	-8,4	3,2	-16,3	44,8	1,5
18	-87,0	4,9	-10,3	1,9	-18,2	77,7	0,8
19	-151,7	2,2	-12,9	0,7	-20,1	219,9	0,3
20	-71,8	4,0	-10,0	2,7	-18,9	59,0	1,1
21	-65,0	3,8	-9,9	3,1	-19,2	53,0	1,3
22	-92,0	4,5	-11,6	2,2	-21,0	78,7	0,8
23	-147,4	-0,6	-14,2	1,1	-23,0	169,8	0,4
24	-89,3	4,3	-12,0	2,5	-22,1	74,3	0,9
25	-76,3	3,9	-11,5	3,1	-22,2	62,2	1,1

Варіант 17, 39

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-27,8	5,3	-3,1	1,7	-5,3	26,2	1,8
2	-27,7	4,1	-3,4	2,1	-6,0	24,2	2,1
3	-23,7	3,4	-3,4	2,9	-6,5	19,4	2,7
4	-26,8	3,5	-3,8	2,9	-7,3	21,9	2,5
5	-39,4	4,4	-4,7	2,0	-8,4	34,9	1,6
6	-46,8	5,1	-5,3	1,8	-9,2	43,2	1,3
7	-36,6	3,7	-5,1	2,7	-9,6	30,1	1,9
8	-35,8	3,5	-5,3	3,0	-10,1	29,2	2,0
9	-48,9	4,1	-6,2	2,3	-11,3	41,6	1,4
10	-71,1	10,0	-7,5	1,4	-12,6	71,6	0,8
11	-51,8	4,0	-6,9	2,5	-12,7	43,2	1,4
12	-44,6	3,6	-6,7	3,1	-13,0	36,4	1,7
13	-57,0	4,0	-7,6	2,5	-14,2	47,4	1,3
14	-103,2	-0,5	-9,9	1,1	-16,0	119,6	0,5
15	-70,0	4,4	-8,8	2,2	-15,9	60,0	1,1
16	-53,6	3,7	-8,2	3,1	-15,9	43,8	1,5
17	-64,3	4,0	-9,0	2,7	-17,0	52,8	1,2
18	-148,8	2,2	-12,6	0,7	-19,6	217,8	0,3
19	-92,5	5,0	-10,9	1,9	-19,3	82,7	0,8
20	-63,3	3,8	-9,7	3,1	-18,8	51,6	1,3
21	-71,3	3,9	-10,4	2,9	-19,8	58,3	1,1
22	-153,1	1,1	-14,2	0,9	-22,6	188,8	0,4
23	-120,8	6,5	-13,3	1,6	-22,7	115,7	0,6
24	-74,1	3,9	-11,2	3,1	-21,7	60,5	1,1
25	-78,5	4,0	-11,7	3,0	-22,6	64,1	1,1

Варіант **18, 40**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-39,4	0,3	-3,7	1,0	-5,9	48,2	1,0
2	-21,8	3,3	-3,2	3,0	-6,0	17,8	2,8
3	-22,6	3,2	-3,5	3,2	-6,7	18,4	2,9
4	-38,2	4,6	-4,5	1,9	-7,9	34,2	1,6
5	-70,6	1,9	-6,0	0,7	-9,2	104,7	0,5
6	-34,3	3,6	-4,8	2,8	-9,1	28,2	2,0
7	-32,5	3,4	-5,0	3,2	-9,6	26,5	2,2
8	-48,0	4,2	-6,0	2,2	-10,9	41,2	1,4
9	-79,8	-0,4	-7,6	1,1	-12,3	93,0	0,6
10	-49,0	3,9	-6,6	2,5	-12,2	40,7	1,5
11	-43,1	3,6	-6,5	3,1	-12,6	35,1	1,8
12	-56,3	4,1	-7,5	2,5	-13,7	47,0	1,3
13	-86,8	10,8	-9,1	1,4	-15,3	87,9	0,7
14	-66,5	4,3	-8,5	2,3	-15,4	56,5	1,1
15	-55,0	3,8	-8,1	3,0	-15,6	44,8	1,4
16	-63,6	4,0	-8,8	2,7	-16,6	52,4	1,2
17	-92,4	5,5	-10,5	1,7	-18,2	85,5	0,8
18	-87,9	4,8	-10,6	2,0	-18,7	77,6	0,8
19	-68,6	4,0	-9,8	2,8	-18,7	56,2	1,2
20	-70,6	4,0	-10,2	2,9	-19,4	57,8	1,1
21	-96,9	4,8	-11,8	2,0	-21,0	84,9	0,8
22	-114,8	6,0	-12,9	1,7	-22,2	107,8	0,6
23	-84,8	4,2	-11,7	2,6	-21,8	70,0	1,0
24	-77,7	4,0	-11,5	3,0	-22,2	63,4	1,1
25	-101,0	4,5	-13,0	2,3	-23,7	85,4	0,8

Варіант **19, 41**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-26,0	3,9	-3,2	2,2	-5,8	22,3	2,2
2	-21,1	3,2	-3,2	3,2	-6,3	17,2	3,0
3	-26,8	3,5	-3,8	2,8	-7,1	22,0	2,4
4	-68,4	2,0	-5,7	0,7	-8,7	105,0	0,5
5	-44,0	4,7	-5,2	1,9	-9,0	39,6	1,4
6	-31,0	3,4	-4,7	3,2	-9,2	25,2	2,3
7	-35,9	3,6	-5,2	2,9	-10,0	29,4	2,0
8	-78,4	0,3	-7,4	1,0	-11,9	93,9	0,6
9	-66,7	6,7	-7,3	1,6	-12,3	64,7	0,9
10	-41,4	3,6	-6,3	3,1	-12,1	33,8	1,8
11	-44,7	3,6	-6,7	3,1	-12,9	36,4	1,7
12	-85,8	15,5	-8,9	1,4	-14,9	88,2	0,7
13	-96,3	-8,0	-9,6	1,2	-15,8	104,8	0,6
14	-53,1	3,7	-7,9	3,0	-15,1	43,3	1,5
15	-53,4	3,7	-8,1	3,1	-15,7	43,6	1,5
16	-91,5	5,7	-10,3	1,7	-17,8	85,6	0,8
17	-136,9	1,7	-12,2	0,8	-19,3	180,1	0,4
18	-66,5	3,9	-9,6	2,9	-18,2	54,4	1,2
19	-62,8	3,8	-9,6	3,2	-18,6	51,2	1,3
20	-96,2	4,8	-11,6	2,0	-20,6	84,8	0,8
21	-163,0	2,0	-14,4	0,8	-22,6	219,8	0,3
22	-82,2	4,1	-11,4	2,7	-21,4	67,8	1,0
23	-73,1	3,9	-11,1	3,1	-21,6	59,6	1,1
24	-100,3	4,5	-12,8	2,3	-23,3	85,1	0,8
25	-157,5	-4,1	-15,6	1,2	-25,5	174,0	0,4

Варіант **20, 42**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-21,1	3,3	-3,1	3,0	-5,9	17,2	2,9
2	-25,2	3,5	-3,5	2,8	-6,7	20,7	2,5
3	-38,3	4,7	-4,5	1,9	-7,8	34,6	1,6
4	-41,5	4,6	-4,9	1,9	-8,6	37,3	1,5
5	-33,4	3,6	-4,7	2,8	-8,9	27,4	2,1
6	-34,4	3,6	-5,0	2,9	-9,6	28,1	2,0
7	-48,2	4,3	-6,0	2,2	-10,7	41,6	1,4
8	-63,7	6,5	-7,0	1,6	-11,9	61,6	1,0
9	-47,7	3,9	-6,5	2,6	-12,0	39,5	1,5
10	-43,2	3,6	-6,5	3,1	-12,4	35,2	1,7
11	-56,5	4,1	-7,4	2,4	-13,6	47,4	1,3
12	-92,7	-11,0	-9,3	1,2	-15,3	100,3	0,6
13	-64,7	4,2	-8,3	2,3	-15,2	54,7	1,2
14	-52,0	3,7	-7,9	3,1	-15,3	42,4	1,5
15	-63,9	4,0	-8,8	2,6	-16,5	52,7	1,2
16	-132,3	1,6	-11,9	0,9	-18,8	172,2	0,4
17	-85,5	4,7	-10,4	2,0	-18,5	74,9	0,9
18	-61,3	3,8	-9,4	3,2	-18,2	50,0	1,3
19	-70,8	4,0	-10,1	2,8	-19,3	58,0	1,1
20	-160,9	2,0	-14,1	0,8	-22,1	219,5	0,3
21	-111,5	5,6	-12,7	1,7	-21,9	103,2	0,6
22	-71,6	3,9	-10,9	3,1	-21,1	58,4	1,1
23	-77,8	4,0	-11,5	3,0	-22,0	63,5	1,1
24	-155,6	-3,1	-15,3	1,1	-25,0	173,1	0,4
25	-144,7	11,0	-15,2	1,4	-25,5	146,4	0,5

Варіант **21, 43**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-20,6	3,2	-3,2	3,2	-6,1	16,8	3,0
2	-35,8	4,6	-4,2	1,9	-7,3	32,3	1,6
3	-67,1	1,9	-5,6	0,7	-8,6	102,9	0,5
4	-31,8	3,6	-4,5	2,8	-8,5	26,1	2,1
5	-30,5	3,4	-4,7	3,2	-9,0	24,8	2,3
6	-45,9	4,2	-5,7	2,2	-10,3	39,6	1,5
7	-77,4	0,3	-7,3	1,0	-11,7	92,7	0,6
8	-46,0	3,9	-6,2	2,6	-11,6	38,2	1,6
9	-40,9	3,6	-6,2	3,1	-12,0	33,4	1,8
10	-54,4	4,1	-7,2	2,4	-13,2	45,6	1,3
11	-84,9	15,6	-8,8	1,4	-14,7	87,3	0,7
12	-63,0	4,2	-8,1	2,3	-14,8	53,4	1,2
13	-52,6	3,7	-7,8	3,0	-15,0	42,9	1,5
14	-62,0	4,0	-8,5	2,6	-16,0	51,1	1,2
15	-90,7	5,7	-10,2	1,7	-17,6	84,9	0,8
16	-83,8	4,7	-10,2	2,0	-18,1	73,5	0,9
17	-65,9	3,9	-9,5	2,9	-18,0	53,9	1,2
18	-69,0	4,0	-9,9	2,8	-18,8	56,5	1,2
19	-95,5	4,8	-11,5	2,0	-20,4	84,2	0,8
20	-109,6	5,7	-12,4	1,7	-21,5	101,8	0,6
21	-81,7	4,1	-11,3	2,7	-21,2	67,3	1,0
22	-76,1	4,0	-11,2	3,0	-21,6	62,1	1,1
23	-99,7	4,5	-12,7	2,3	-23,2	84,6	0,8
24	-142,8	12,0	-15,0	1,4	-25,0	145,2	0,5
25	-100,5	4,4	-13,3	2,4	-24,5	84,0	0,8

Варіант 22, 44

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	-24,4	3,4	-3,5	2,8	-6,5	20,0	2,6
2	-62,0	1,8	-5,2	0,7	-8,1	92,5	0,6
3	-41,5	4,8	-4,8	1,9	-8,4	37,7	1,4
4	-29,0	3,4	-4,4	3,2	-8,6	23,7	2,4
5	-33,6	3,5	-4,9	3,0	-9,4	27,5	2,1
6	-72,6	-0,4	-6,9	1,1	-11,2	85,0	0,7
7	-64,3	7,3	-6,9	1,5	-11,7	63,1	0,9
8	-39,6	3,6	-6,0	3,1	-11,5	32,3	1,9
9	-42,5	3,6	-6,4	3,1	-12,3	34,6	1,8
10	-80,7	11,1	-8,5	1,4	-14,2	81,8	0,8
11	-94,1	-3,8	-9,3	1,2	-15,2	104,3	0,6
12	-51,3	3,7	-7,6	3,0	-14,5	41,9	1,5
13	-51,4	3,7	-7,8	3,1	-15,2	41,9	1,5
14	-87,0	5,5	-9,9	1,7	-17,1	80,7	0,8
15	-135,3	1,9	-11,9	0,8	-18,7	183,7	0,4
16	-64,8	3,9	-9,3	2,8	-17,6	53,0	1,2
17	-60,8	3,8	-9,3	3,2	-18,0	49,6	1,3
18	-92,1	4,8	-11,2	2,0	-19,9	80,7	0,8
19	-154,7	1,7	-13,9	0,9	-21,9	202,3	0,3
20	-80,6	4,1	-11,1	2,6	-20,8	66,5	1,0
21	-71,3	3,9	-10,8	3,1	-21,0	58,1	1,1
22	-96,6	4,5	-12,4	2,3	-22,7	81,7	0,8
23	-150,7	-9,3	-15,1	1,2	-24,8	163,4	0,4
24	-99,7	4,4	-13,1	2,4	-24,1	83,6	0,8
25	-83,3	4,0	-12,5	3,0	-24,0	67,9	1,0

## Додаток Е.

### Завдання для дискримінантного аналізу

Варіант **1, 23**

**2, 24**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	318,34	95,04	352,66	25,19	1	347,30	103,7	384,70	27,48	1
2	347,49	43,56	281,16	23,76	1	379,10	47,52	306,70	25,92	1
3	259,93	69,63	330,55	19,69	1	283,60	75,96	360,60	21,48	1
4	259,82	90,42	326,59	17,82	1	283,40	98,64	356,30	19,44	1
5	235,73	63,58	303,27	17,49	1	257,20	69,36	330,80	19,08	1
6	193,82	50,82	270,82	17,27	1	211,40	55,44	295,40	18,84	1
7	946,22	224,07	678,59	55,99	1	1032,00	244,40	740,30	61,08	1
8	197,67	26,95	312,51	15,51	0	215,60	29,40	340,90	16,92	0
9	154,77	43,34	284,46	13,42	0	168,8	47,28	310,30	14,64	0
10	124,63	22,66	239,03	9,24	0	136,00	24,72	260,80	10,08	0
11	175,23	52,36	341,55	14,41	0	191,20	57,12	372,6	15,72	0
12	221,98	30,80	285,12	16,83	0	242,20	33,60	311,00	18,36	0
13	195,14	65,67	309,87	14,19		212,90	71,64	338,00	15,48	
14	163,68	69,08	283,58	14,52		178,60	75,36	309,40	15,84	
15	178,97	85,80	329,01	14,52		195,20	93,60	358,90	15,84	
16	254,76	90,20	416,13	17,82		277,90	98,40	454,00	19,44	
17	169,29	75,02	454,08	12,21		184,70	81,84	495,40	13,32	
18	212,08	106,48	305,69	20,02		231,40	116,20	333,50	21,84	



Варіант **3, 25****4, 26**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	376,22	112,32	416,78	29,77	1	405,16	120,96	448,84	32,06	1
2	410,67	51,48	332,28	28,08	1	442,26	55,44	357,84	30,24	1
3	307,19	82,29	390,65	23,27	1	330,82	88,62	420,70	25,06	1
4	307,06	106,86	385,97	21,06	1	330,68	115,08	415,66	22,68	1
5	278,59	75,14	358,41	20,67	1	300,02	80,92	385,98	22,26	1
6	229,06	60,06	320,06	20,41	1	246,68	64,68	344,68	21,98	1
7	1118,26	264,81	801,97	66,17	1	1204,28	285,18	863,66	71,26	1
8	233,61	31,85	369,33	18,33	0	251,58	34,30	397,74	19,74	0
9	182,91	51,22	336,18	15,86	0	196,98	55,16	362,04	17,08	0
10	147,29	26,78	282,49	10,92	0	158,62	28,84	304,22	11,76	0
11	207,09	61,88	403,65	17,03	0	223,02	66,64	434,70	18,34	0
12	262,34	36,40	336,96	19,89	0	282,52	39,20	362,88	21,42	0
13	230,62	77,61	366,21	16,77		248,36	83,58	394,38	18,06	
14	193,44	81,64	335,14	17,16		208,32	87,92	360,92	18,48	
15	211,51	101,40	388,83	17,16		227,78	109,20	418,74	18,48	
16	301,08	106,60	491,79	21,06		324,24	114,80	529,62	22,68	
17	200,07	88,66	536,64	14,43		215,46	95,48	577,92	15,54	
18	250,64	125,84	361,27	23,66		269,92	135,52	389,06	25,48	

Варіант **5, 27****6, 28**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	434,10	129,60	480,90	34,35	1	463,04	138,24	512,96	36,64	1
2	473,85	59,40	383,40	32,40	1	505,44	63,36	408,96	34,56	1
3	354,45	94,95	450,75	26,85	1	378,08	101,28	480,80	28,64	1
4	354,30	123,30	445,35	24,30	1	377,92	131,52	475,04	25,92	1
5	321,45	86,70	413,55	23,85	1	342,88	92,48	441,12	25,44	1
6	264,30	69,30	369,30	23,55	1	281,92	73,92	393,92	25,12	1
7	1290,30	305,55	925,35	76,35	1	1376,32	325,92	987,04	81,44	1
8	269,55	36,75	426,15	21,15	0	287,52	39,20	454,56	22,56	0
9	211,05	59,10	387,90	18,30	0	225,12	63,04	413,76	19,52	0
10	169,95	30,90	325,95	12,60	0	181,28	32,96	347,68	13,44	0
11	238,95	71,40	465,75	19,65	0	254,88	76,16	496,80	20,96	0
12	302,70	42,00	388,80	22,95	0	322,88	44,80	414,72	24,48	0
13	266,10	89,55	422,55	19,35		283,84	95,52	450,72	20,64	
14	223,20	94,20	386,70	19,80		238,08	100,48	412,48	21,12	
15	244,05	117,00	448,65	19,80		260,32	124,80	478,56	21,12	
16	347,40	123,00	567,45	24,30		370,56	131,20	605,28	25,92	
17	230,85	102,30	619,20	16,65		246,24	109,12	660,48	17,76	
18	289,20	145,20	416,85	27,30		308,48	154,88	444,64	29,12	

Варіант 7, 29

8, 30

Об'єкт	Показники					Показники				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	491,98	146,88	545,02	38,93	1	320,92	125,52	227,08	26,22	1
2	537,03	67,32	434,52	36,72	1	368,62	41,28	110,08	23,88	1
3	401,71	107,61	510,85	30,43	1	225,34	83,94	190,90	17,22	1
4	401,54	139,74	504,73	27,54	1	225,16	117,96	184,42	14,16	1
5	364,31	98,26	468,69	27,03	1	185,74	74,04	146,26	13,62	1
6	299,54	78,54	418,54	26,69	1	117,16	53,16	93,16	13,26	1
7	1462,34	346,29	1048,73	86,53	1	1348,36	336,66	760,42	76,62	1
8	305,49	41,65	482,97	23,97	0	123,46	14,10	161,38	10,38	0
9	239,19	66,98	439,62	20,74	0	53,26	40,92	115,48	6,96	0
10	192,61	35,02	369,41	14,28	0	3,94	7,08	41,14	0,12	0
11	270,81	80,92	527,85	22,27	0	86,74	55,68	208,90	8,58	0
12	343,06	47,60	440,64	26,01	0	163,24	20,40	116,56	12,54	0
13	301,58	101,49	478,89	21,93		119,32	77,46	157,06	8,22	
14	252,96	106,76	438,26	22,44		67,84	83,04	114,04	8,76	
15	276,59	132,60	508,47	22,44		92,86	110,40	188,38	8,76	
16	393,72	139,40	643,11	27,54		216,88	117,60	330,94	14,16	
17	261,63	115,94	701,76	18,87		77,02	92,76	393,04	4,98	
18	327,76	164,56	472,43	30,94		147,04	144,24	150,22	17,76	

Варіант **9, 31****10, 32**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	349,86	134,16	259,14	28,51	1	378,80	142,80	291,20	30,80	1
2	400,21	45,24	135,64	26,04	1	431,80	49,20	161,20	28,20	1
3	248,97	90,27	220,95	19,01	1	272,60	96,60	251,00	20,80	1
4	248,78	126,18	214,11	15,78	1	272,40	134,40	243,80	17,40	1
5	207,17	79,82	173,83	15,21	1	228,60	85,60	201,40	16,80	1
6	134,78	57,78	117,78	14,83	1	152,40	62,40	142,40	16,40	1
7	1434,38	357,03	822,11	81,71	1	1520,40	377,40	883,80	86,80	1
8	141,43	16,55	189,79	11,79	0	159,40	19,00	218,20	13,20	0
9	67,33	44,86	141,34	8,18	0	81,40	48,80	167,20	9,40	0
10	15,27	9,14	62,87	0,96	0	26,60	11,20	84,60	1,80	0
11	102,67	60,44	239,95	9,89	0	118,60	65,20	271,00	11,20	0
12	183,42	23,20	142,48	14,07	0	203,60	26,00	168,40	15,60	0
13	137,06	83,43	185,23	9,51		154,80	89,40	213,40	10,80	
14	82,72	89,32	139,82	10,08		97,60	95,60	165,60	11,40	
15	109,13	118,20	218,29	10,08		125,40	126,00	248,20	11,40	
16	240,04	125,80	368,77	15,78		263,20	134,00	406,60	17,40	
17	92,41	99,58	434,32	6,09		107,80	106,40	475,60	7,20	
18	166,32	153,92	178,01	19,58		185,60	163,60	205,80	21,40	

Варіант **11, 33****12, 34**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	377,74	141,44	223,26	31,09	1	406,68	150,08	255,32	33,38	1
2	433,39	43,16	86,76	28,36	1	464,98	47,12	112,32	30,52	1
3	266,23	92,93	181,05	20,59	1	289,86	99,26	211,10	22,38	1
4	266,02	132,62	173,49	17,02	1	289,64	140,84	203,18	18,64	1
5	220,03	81,38	128,97	16,39	1	241,46	87,16	156,54	17,98	1
6	140,02	57,02	67,02	15,97	1	157,64	61,64	91,64	17,54	1
7	1576,42	387,77	845,49	89,89	1	1662,44	408,14	907,18	94,98	1
8	147,37	11,45	146,61	12,61	0	165,34	13,90	175,02	14,02	0
9	65,47	42,74	93,06	8,62	0	79,54	46,68	118,92	9,84	0
10	7,93	3,26	6,33	0,64	0	19,26	5,32	28,06	1,48	0
11	104,53	59,96	202,05	10,51	0	120,46	64,72	233,10	11,82	0
12	193,78	18,80	94,32	15,13	0	213,96	21,60	120,24	16,66	0
13	142,54	85,37	141,57	10,09		160,28	91,34	169,74	11,38	
14	82,48	91,88	91,38	10,72		97,36	98,16	117,16	12,04	
15	111,67	123,80	178,11	10,72		127,94	131,60	208,02	12,04	
16	256,36	132,20	344,43	17,02		279,52	140,40	382,26	18,64	
17	93,19	103,22	416,88	6,31		108,58	110,04	458,16	7,42	
18	174,88	163,28	133,59	21,22		194,16	172,96	161,38	23,04	

Варіант 13, 35

14, 36

Об'єкт	Показники					Показники				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	37,88	13,28	24,12	3,08	1	66,82	21,92	56,18	5,37	1
2	43,18	3,92	11,12	2,82	1	74,77	7,88	36,68	4,98	1
3	27,26	8,66	20,10	2,08	1	50,89	14,99	50,15	3,87	1
4	27,24	12,44	19,38	1,74	1	50,86	20,66	49,07	3,36	1
5	22,86	7,56	15,14	1,68	1	44,29	13,34	42,71	3,27	1
6	15,24	5,24	9,24	1,64	1	32,86	9,86	33,86	3,21	1
7	152,04	36,74	83,38	8,68	1	238,06	57,11	145,07	13,77	1
8	15,94	0,90	16,82	1,32	0	33,91	3,35	45,23	2,73	0
9	8,14	3,88	11,72	0,94	0	22,21	7,82	37,58	2,16	0
10	2,66	0,12	3,46	0,18	0	13,99	2,18	25,19	1,02	0
11	11,86	5,52	22,10	1,12	0	27,79	10,28	53,15	2,43	0
12	20,36	1,60	11,84	1,56	0	40,54	4,40	37,76	3,09	0
13	15,48	7,94	16,34	1,08		33,22	13,91	44,51	2,37	
14	9,76	8,56	11,56	1,14		24,64	14,84	37,34	2,46	
15	12,54	11,60	19,82	1,14		28,81	19,40	49,73	2,46	
16	26,32	12,40	35,66	1,74		49,48	20,60	73,49	3,36	
17	10,78	9,64	42,56	0,72		26,17	16,46	83,84	1,83	
18	18,56	15,36	15,58	2,14		37,84	25,04	43,37	3,96	

Варіант **15, 37****16, 38**

Об'єкт	<i>Показники</i>					<i>Показники</i>				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	53,82	19,92	44,18	4,97	1	121,84	36,37	134,97	9,64	1
2	61,77	5,88	24,68	4,58	1	132,99	16,67	107,61	9,09	1
3	37,89	12,99	38,15	3,47	1	99,48	26,65	126,51	7,54	1
4	37,86	18,66	37,07	2,96	1	99,44	34,61	124,99	6,82	1
5	31,29	11,34	30,71	2,87	1	90,22	24,33	116,07	6,69	1
6	19,86	7,86	21,86	2,81	1	74,18	19,45	103,65	6,61	1
7	225,06	55,11	133,07	13,37	1	362,14	85,76	259,71	21,43	1
8	20,91	1,35	33,23	2,33	0	75,65	10,31	119,61	5,94	0
9	9,21	5,82	25,58	1,76	0	59,23	16,59	108,87	5,14	0
10	0,99	0,18	13,19	0,62	0	47,70	8,67	91,48	3,54	0
11	14,79	8,28	41,15	2,03	0	67,07	20,04	130,72	5,52	0
12	27,54	2,40	25,76	2,69	0	84,96	11,79	109,12	6,44	0
13	20,22	11,91	32,51	1,97		74,69	25,13	118,60	5,43	
14	11,64	12,84	25,34	2,06		62,64	26,44	108,53	5,56	
15	15,81	17,40	37,73	2,06		68,50	32,84	125,92	5,56	
16	36,48	18,60	61,49	2,96		97,50	34,52	159,26	6,82	
17	13,17	14,46	71,84	1,43		64,79	28,71	173,79	4,67	
18	24,84	23,04	31,37	3,56		81,17	40,75	117,00	7,66	

Варіант 17, 39

18, 40

Об'єкт	Показники					Показники				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	101,29	30,24	112,21	8,02	1	72,35	21,60	80,15	5,73	1
2	110,57	13,86	89,46	7,56	1	78,98	9,90	63,90	5,40	1
3	82,71	22,16	105,18	6,27	1	59,08	15,83	75,13	4,48	1
4	82,67	28,77	103,92	5,67	1	59,05	20,55	74,23	4,05	1
5	75,01	20,23	96,50	5,57	1	53,58	14,45	68,93	3,98	1
6	61,67	16,17	86,17	5,50	1	44,05	11,55	61,55	3,93	1
7	301,07	71,30	215,92	17,82	1	215,05	50,93	154,23	12,73	1
8	62,90	8,58	99,44	4,94	0	44,93	6,13	71,03	3,53	0
9	49,25	13,79	90,51	4,27	0	35,18	9,85	64,65	3,05	0
10	39,66	7,21	76,06	2,94	0	28,33	5,15	54,33	2,10	0
11	55,76	16,66	108,68	4,59	0	39,83	11,90	77,63	3,28	0
12	70,63	9,80	90,72	5,36	0	50,45	7,00	64,80	3,83	0
13	62,09	20,90	98,60	4,52		44,35	14,93	70,43	3,23	
14	52,08	21,98	90,23	4,62		37,20	15,70	64,45	3,30	
15	56,95	27,30	104,69	4,62		40,68	19,50	74,78	3,30	
16	81,06	28,70	132,41	5,67		57,90	20,50	94,58	4,05	
17	53,87	23,87	144,48	3,89		38,48	17,05	103,20	2,78	
18	67,48	33,88	97,27	6,37		48,20	24,20	69,48	4,55	



Варіант 19, 41

20, 42

Об'єкт	Показники					Показники				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	36,18	10,80	40,08	2,86	1	50,65	15,12	56,11	4,01	1
2	39,49	4,95	31,95	2,70	1	55,28	6,93	44,73	3,78	1
3	29,54	7,91	37,56	2,24	1	41,35	11,08	52,59	3,13	1
4	29,53	10,28	37,11	2,03	1	41,34	14,39	51,96	2,84	1
5	26,79	7,23	34,46	1,99	1	37,50	10,12	48,25	2,78	1
6	22,03	5,78	30,78	1,96	1	30,84	8,09	43,09	2,75	1
7	107,53	25,46	77,11	6,36	1	150,54	35,65	107,96	8,91	1
8	22,46	3,06	35,51	1,76	0	31,45	4,29	49,72	2,47	0
9	17,59	4,93	32,33	1,53	0	24,62	6,90	45,26	2,14	0
10	14,16	2,58	27,16	1,05	0	19,83	3,61	38,03	1,47	0
11	19,91	5,95	38,81	1,64	0	27,88	8,33	54,34	2,29	0
12	25,23	3,50	32,40	1,91	0	35,32	4,90	45,36	2,68	0
13	22,18	7,46	35,21	1,61		31,05	10,45	49,30	2,26	
14	18,60	7,85	32,23	1,65		26,04	10,99	45,12	2,31	
15	20,34	9,75	37,39	1,65		28,47	13,65	52,34	2,31	
16	28,95	10,25	47,29	2,03		40,53	14,35	66,20	2,84	
17	19,24	8,53	51,60	1,39		26,93	11,94	72,24	1,94	
18	24,10	12,10	34,74	2,28		33,74	16,94	48,63	3,19	

Об'єкт	Показники					Показники				
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	62,22	18,58	68,93	4,92	1	91,16	27,22	100,99	7,21	1
2	67,92	8,51	54,95	4,64	1	99,51	12,47	80,51	6,80	1
3	50,80	13,61	64,61	3,85	1	74,43	19,94	94,66	5,64	1
4	50,78	17,67	63,83	3,48	1	74,40	25,89	93,52	5,10	1
5	46,07	12,43	59,28	3,42	1	67,50	18,21	86,85	5,01	1
6	37,88	9,93	52,93	3,38	1	55,50	14,55	77,55	4,95	1
7	184,94	43,80	132,63	10,94	1	270,96	64,17	194,32	16,03	1
8	38,64	5,27	61,08	3,03	0	56,61	7,72	89,49	4,44	0
9	30,25	8,47	55,60	2,62	0	44,32	12,41	81,46	3,84	0
10	24,36	4,43	46,72	1,81	0	35,69	6,49	68,45	2,65	0
11	34,25	10,23	66,76	2,82	0	50,18	14,99	97,81	4,13	0
12	43,39	6,02	55,73	3,29	0	63,57	8,82	81,65	4,82	0
13	38,14	12,84	60,57	2,77		55,88	18,81	88,74	4,06	
14	31,99	13,50	55,43	2,84		46,87	19,78	81,21	4,16	
15	34,98	16,77	64,31	2,84		51,25	24,57	94,22	4,16	
16	49,79	17,63	81,33	3,48		72,95	25,83	119,16	5,10	
17	33,09	14,66	88,75	2,39		48,48	21,48	130,03	3,50	
18	41,45	20,81	59,75	3,91		60,73	30,49	87,54	5,73	